Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Juli 2007

11. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (3 Punkte)

Entscheide, ob die folgende Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und eine Einbettung ist. Entscheide, ob $\varphi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist.

1. $U = \mathbb{R}^2$ und $\varphi(x, y) = (2x + 3y, x - y, xy)$;
2. $U = (0, 1) \times (0, \pi)$ und $\varphi(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x + y)$;
3. $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varphi(t) = (2t^2 + 3, \sin^2 t, \cos^2 t)$.

A 2 (3 Punkte)

Entscheide, ob die Menge M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Falls ja, gebe ihre Dimension sowie einen Umgebungsatlas (aller Karten, durch die die Menge M dargestellt wird) an.

1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3e^x + xy + z = 1\}$,
2. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2y - x + xyz = 0\}$,
3. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \cos^2 x + x^2 y - z = 2 \text{ und } \ln(1 + x^2) + y + z = 3\}$.

A 3 (3 Punkte)

1. Sei $z, r \in C^1(I)$ mit $r > 0$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval ist. Sei entweder $r'(t) \neq 0$ oder $z'(t) \neq 0$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z(t)) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 = r(t)^2,\ t \in I\}$$

eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Zeige, dass die Mengen $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - 2z = 1,\ 4 < z < 9\}$ und $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ a^2(x^2 + y^2) = r^2(a + z)^2,\ 0 < z < a,\ r, a > 0\}$ 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ sind.

A 4 (2 Punkte)

Seien $0 < r < R < \infty$. Zeige, dass der Torus

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Betrachte die Parametrisierung $\psi(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos v)\cos u \\ (R + r\cos v)\sin u \\ r \sin v \end{pmatrix}$ mit $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

A 5 (4 Punkte)

Wieviele Karten braucht man mindestens für einen Atlas der Erde? Gebe diese Karten an.