Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Juni 2007

8. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (2 Punkte)

Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n}, & \frac{1}{2^n} \le x \le \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^n} < y \le \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{2n+1}, & \frac{1}{2^{n+1}} \le x < \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^n} < y \le \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx \neq \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ ist.
Ist $f(x,y)$ auf $[0,1] \times [0,1]$ Lebesgue-integrierbar?

A 2 (3 Punkte)

Sei $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass die Integrale $\int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 f(x,y)dy)dx$, $\int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 f(x,y)dx)dy$ existieren und übereinstimmen, aber dass das Integral $\int_{[-1,1]\times[-1,1]} f(x,y)d\lambda(x,y)$ nicht existiert.

A 3 (3 Punkte)

Berechne das Integral $\int_B f(x,y)dxdy$ mit:

1. $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$;
2. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$;
3. $f(x,y) = x^2+y^2$ und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \le 4\}$.

A 4 (2 Punkte)

Sei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 2\}$. Berechne das Integral

$$\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz.$$

A 5 (2 Punkte)

Berechne das Integral $\int_B x^2+y^2 dxdy$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le x\}$.

A 6 (4 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bezeichnen wir $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Sei B die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$. Bestimme alle reellen Zahlen α, so dass das Integral

1. $\int_B \|x\|^\alpha d\lambda_n(x)$,
2. $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \|x\|^\alpha d\lambda_n(x)$

existiert und finde seinen Wert.