Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Mai 2007

# 2. Übung zur Analysis IV

## Aufgaben

**A 1** Beweise, dass jede monoton wachsende Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist.

**A 2** Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$. Weiter sei $\mathcal{S}$ die kleinste $\sigma$-Algebra in $X$, die $\mathcal{A}$ enthält.

1. Bestimme $\mathcal{S}$. Ist $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$? (Aufgabe 3, Übung 1)
2. Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$(i)\ f(x) = (x-3)^2, \qquad (ii)\ f(x) = \left| x - \frac{7}{2} \right|.$$

**A 3** $^K$ Sei $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sei $\{x : f(x) = c\}$ messbar für alle $c \in \mathbb{R}$. Folgt daraus, dass die Funktion $f(x)$ messbar ist?

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass es auf $\mathbb{R}$ nicht Borel-messbare Mengen gibt.

**A 4** (5 Punkte) Sei $X = (0, 1)$ und $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Sei $\mathcal{S}$ die kleinste $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.

1. Gehört $\left[\frac{1}{150}, \frac{1}{7}\right)$ zu $\mathcal{S}$?
2. Bestimme $\mathcal{S}$. (Aufgabe 4, Übung 1)
3. Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ messbar ist.
4. Bestimme alle messbaren Funktionen $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

**A 5** (4 Punkte)

Entscheide, ob die Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$(i)\ f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (ii)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{wenn } x = \frac{p}{q},\ \ q > 0,\ p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**A 6** (3 Punkte)

1. Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige, dass

$$f[\mathcal{S}] := \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$$

eine $\sigma-$Algebra ist (diese heißt auch *direktes Bild von $\mathcal{S}$ unter $f$*).

2. Es seien $(X_1, \mathcal{S}_1), (X_2, \mathcal{S}_2)$ messbare Räume und $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung. Zeige:

$$f \text{ messbar} \Leftrightarrow \mathcal{S}_2 \subseteq f[\mathcal{S}_1].$$

**A 7** (3 Punkte)

Sei $f_n : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Folge messbarer Funktionen. Zeige, dass die Menge $L$ aller $x \in X$, für die $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ existiert, messbar ist.