Sei V euklidischer VR, $W \subset V$ Unter-VR.

Das <u>orthogonale Komplement</u> $W^\perp$ von W ist def als

$$W^\perp = \{a \in V;\ \langle a, x\rangle = 0 \quad \forall x \in W\}$$

<u>Bem 4:</u>
i) $W^\perp \subset V$ Unter-VR
ii) $W \cap W^\perp = \{0\}$

<u>Bew</u>: Übung.

<u>Satz 4:</u>
Sei $W \subset V$ Unter-VR. Es gilt

$$V = W \oplus W^\perp,$$

d.h. V ist die direkte Summe von W und $W^\perp$ (jedes $v \in V$ läßt sich <u>eindeutig</u> schreiben als $v = w + w'$ mit $w \in W$ und $w' \in W^\perp$).

<u>Bew</u>: Wegen Bem 4 ii genügt zz:

$$V = W + W^\perp.$$

Falls $W + W^\perp \subsetneq V$, so ex nach Bem 2 ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit $v \perp W$ und $v \perp W^\perp$.

$$\Rightarrow v \in W^\perp \cap (W^\perp)^\perp \overset{\text{Bem 4}}{=} \{0\} \quad ↯ \quad \square$$

§7 Unitäre Vektorräume

Auf dem $\mathbb{C}^n$ ist das Standard-Skalarprodukt def. als

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\langle x, y \rangle = \bar{x}^t y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i .$$

Es ist antilinear in der ersten, linear in der zweiten Var., $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ und pos. def $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n$.

Betrachte solche Abb allgemeiner.

<u>Def</u>: Sei V ein $\mathbb{C}$-VR.
Ein <u>Hermitesches Skalarprodukt auf</u> V ist eine Abb $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

i) Für festes x ist $y \mapsto \langle x,y\rangle$ eine $\mathbb{C}$-lin Abb

ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall\, x,y \in V$

iii) $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in V$.

Das Paar $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ heißt <u>unitärer VR</u>.

- Für festes $y \in V$ ist $x \mapsto \langle x,y\rangle$ antilinear, d.h.
$$\langle x+x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$$
$$\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle .$$

- $x, y \in V$ heißen orthogonal zueinander, falls $\langle x, y \rangle = 0$.
- Ist $W \subset V$ $\mathbb{C}$-Unter-VR, so heißt

$$W^\perp = \{ x \in V,\ \langle x, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$$

das orthogonale Komplement von W.

<u>Satz 1</u>
Jeder endlichdimensionale unitäre $\mathbb{C}$-VR besitzt eine Orthonormal-Basis.

<u>Satz 2</u>
Sei $W \subset V$ Unter-VR.
Dann ist

$$V = W \oplus W^\perp .$$

<u>Def</u>: Sei V unitärer $\mathbb{C}$-VR. Ein Endomorphismus $f: V \to V$ heißt <u>selbstadjungiert</u>, falls

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in V .$$

<u>Bem 3</u>:
Sei f selbstadj. und $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert. Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Bew</u>: Sei $v \in V$ Eigenvektor zu λ.

$$\bar{\lambda}\langle v,v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle$$
$$= \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0} \quad \square$$

<u>Satz 4</u> (Spektralsatz für selbstadjungierte ~~Endomorphismen~~) endl.-dim.

Sei V endl.-dim. unitärer VR und $f: V \to V$ selbstadj. Dann besitzt V eine ONB $e_1, \dots, e_n$ bestehend aus Eigenvektoren von f,

$$f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Die Eigenwerte λ_i sind reell.

<u>Bew</u>: Ind. nach $n = \dim V$.

<u>$n = 1$</u> ✓

<u>Sei $n > 1$</u>:

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von f und $v \in V$ ein Eigenvektor zu ~~λ~~.

Bem 3 $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Sei $W = (\mathbb{C}v)^\perp \subset V$.

$\dim W = n-1$.

<u>Beh</u>: f bildet W auf sich selbst ab.

<u>Denn</u>: Sei $w \in W$.

$$\langle f(w), v\rangle = \langle w, f(v)\rangle$$
$$= \lambda\langle w, v\rangle$$
$$= 0.$$

$\Rightarrow f(w) \in W$.

W ist mit der Einschr. $\langle \cdot,\cdot \rangle_W$ von $\langle \cdot,\cdot \rangle$ auf W ein unitärer $\mathbb{C}$-VR.

Die Einschr. $f|_W$ von f ist selbstadj. bezgl. $\langle \cdot,\cdot \rangle_W$.

Ind-Ann
$\Rightarrow$ W hat ONB $e_1, \dots, e_{n-1}$ von Eigenvektoren von f.

$\Rightarrow$ Mit $e_n = \frac{v}{\|v\|}$ ist

$e_1, \dots, e_n$ ONB von Eigenvektoren von V. $\square$

Def: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, falls $\cancel{A^*}$ $\bar{A}^t = A$.

~~Damit~~
Bem 5: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Die zug. lin. Abb $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Ax$ ist selbstadj. bezügl. des Standardskalarprodukts $\langle \cdot,\cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$ $\Leftrightarrow$ A hermitesch.

Bew: f_A selbstadj.

$$\Leftrightarrow \overline{(Ax)}^t y = \bar{x}^t (Ay) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}^t \bar{A}^t y = \bar{x}^t A y \quad \text{"}$$

$$\Leftrightarrow \bar{A}^t = A.$$

Kor 6: Hermitesche Matrizen $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind diagonalisierbar.

Kor 7: Symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar.

Thm 8: Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ euklidischer $\mathbb{R}$-VR. Sei $\mathcal{B}$ ONB von V und sei $f: V \to V$ Endom.
Es sind äqu.:

i) f ist selbstadj. d.h. $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y$

ii) $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist symmetrisch.

Bew: Benutze $A = (a_{ij})$ mit
$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, b_i .$$

Kor 9: Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ eukl. $\mathbb{R}$-VR und $f: V \to V$ selbst-adj. Dann hat V eine ONB aus Eigenvektoren von f.

Kor.: (Spektralsatz für hermitesche Matrizen)
Sei $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix ($H = \bar{H}^t$). Dann ex. eine unitäre Matrix U (d.h. $\bar{U}^t U = E_n$), so dass
$$\bar{U}^t H U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$
$\lambda_i \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von H sind.

Bew.:
Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Std. Skal.-Prod. $f_H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f_H(x) = Hx$ ist selbstadj.
$\overset{\text{Satz 4}}{\Rightarrow}$ $\mathbb{C}^n$ hat ONB $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ aus Eigenvekt. von f_H und
$$M_B^B(f_H) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Sei $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Std. Basis
$\Rightarrow$ $M_A^A(f_H) = H$.
Sei U = Basiswechselmatrix von B nach A
$$\Rightarrow \quad \bar{U}^t H U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Noch zz: U unitär: Übung. $\square$

Selbstadjungierte Endomorphismen ~~reeller~~ euklidischer Vektorräume.

<u>Ziel</u>: zweiter Beweis des Spektralsatzes im eukl. Fall.

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ endlich-dim. euklidischer Vektorraum. D.h. V ist $\mathbb{R}$-VR der Dim $n<\infty$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ ist euklidisches Skalarprodukt.

<u>Satz 1</u>: V besitzt eine Orthonormalbasis.

Neuer Beweis benutzt den folgenden Satz, der das „Schmidtsche Orthonormalisierungs- (quasi-) verfahren" beschreibt.

<u>Satz 2</u>: Sei $W\subset V$ ein Unter-VR. Jede ONB $(w_1,\dots,w_m)$ von W lässt sich zu einer ONB $(w_1,\dots,w_m,w_{m+1},\dots,w_n)$ von V ergänzen.

Bew: (1) Falls $V = W$: fertig.

(2) Angenommen $V \neq W$.

Dann ex. $v \in V$, $v \notin W$.

Sei $\tilde{v} = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \ldots + \langle v, w_m \rangle w_m$.

Dies ist das Bild von v unter der orthogonalen Projektion

$$P_W : V \longrightarrow W$$

auf W.

Es gilt dann: $w := v - \tilde{v} \in W^\perp$.

Denn:
$$\langle w, w_\ell \rangle = \langle v, w_\ell \rangle - \langle \tilde{v}, w_\ell \rangle$$
$$= \langle v, w_\ell \rangle - \langle v, w_\ell \rangle \underbrace{\langle w_\ell, w_\ell \rangle}_{=1}$$
$$= 0.$$

für $\ell = 1, \ldots, m$.

Es ist $w \neq 0$, denn $v \neq \tilde{v}$ (da $v \notin W$, $\tilde{v} \in W$).

Setze dann $w_{m+1} := \dfrac{w}{\|w\|}$.

Dann ist $(w_1, \ldots, w_{m+1})$ ONB von $\tilde{W} = \mathrm{Lin}(w_1, \ldots, w_{m+1})$.

Weiter bei (1) für $\tilde{W} \subset V$. $\square$

Beweis von Satz 1:

Wende Satz 2 für $W=\{0\}\subset V$ an. □

Bem: In der Praxis ergänzt man $(w_1,\dots,w_m)$ zunächst zu einer Basis $(w_1,\dots,w_m,v_{m+1},\dots,v_n)$ von V und beginnt den 2 Schritt mit $v=v_{m+1}$.

Kor: Ist $W\subset V$ Unter-VR, so gilt $V=W\oplus W^\perp$. Insb. $\dim V=\dim W+\dim W^\perp$.

~~Satz 3~~:

Def: Zwei euklidische VR $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $(W,[\cdot,\cdot])$ heißen <u>isometrisch isomorph</u>, falls es einen $\mathbb{R}$-VR Isomorphismus $\sigma: V\longrightarrow W$ gibt mit der Eigenschaft

$$\langle v_1,v_2\rangle=[\sigma(v_1),\sigma(v_2)]$$

für alle $v_1,v_2\in V$.

Satz 3: Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklid. VR der Dimension n. Dann ist $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ isometrisch isomorph zum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

Bew: Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die Std.-Basis des $\mathbb{R}^n$.
Dies ist eine ONB bzgl. des Std.-Skprod.
Sei $(f_1, \dots, f_n)$ ONB von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
~~Def~~ Betrachte den zug. Isomorphismus definiert durch

$$\sigma(e_i) = f_i .$$

Es ist
$$\langle \sigma(e_i), \sigma(e_j) \rangle = \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$$
und daraus folgt, dass σ isometrisch ist. $\square$

Bemerkung:
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ endl. VR und $f: V \to V$ Endomorphismus. Sei $E = (e_1, \dots, e_n)$ ONB von V und $S = M_E^E(f)$. Es gilt:
Es ist f selbstadjungiert gdw. S symmetrisch ist.

Bew: Sei $(s_{ij}) = M_E^E(f)$.
D.h. $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} e_i$.

~~$\langle e_j, f(e_i) \rangle$~~

$\Rightarrow s_{ij} = \langle e_i, f(e_j)\rangle$

$s_{ji} = \langle e_j, f(e_i)\rangle$.

$= \langle f(e_i), e_j\rangle$.

<u>Also</u>: f selbstadj.

$\Leftrightarrow \langle e_i, f(e_j)\rangle = \langle f(e_i), e_j\rangle$

$\Leftrightarrow s_{ij} = s_{ji}$

$\Leftrightarrow M_E^E(f)$ symmetrisch. $\square$.

<u>Kor</u>: Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto Sx$.

<u>Es gilt</u>: S ist symmetrisch g.d.w. f_S ist selbstadj. bzgl. des Standard-skalarprod. auf $\mathbb{R}^n$.

<u>Lemma</u>: Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat einen reellen Eigenwert.

Bew: (ohne Benutzung des unitären VR):

Wir betrachten die zu A gehörige quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \langle x, Ax \rangle = x^T A x$$

Dies ist ein homogenes Polynom vom Grad 2.

(homogen: $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$)

Etwas Analysis:

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

ist kompakt, deshalb nimmt die stetige Fkt. q darauf ein Maximum an. D.h. es gibt ein $v \in E$ mit

$$q(v) \geq q(x) \text{ für alle } x \in E.$$

Beh: v ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $q(v)$.

Dazu: Es genügt zu zeigen

(*) Ist $w \in E$ mit $\langle v, w \rangle = 0$, so ist auch $\langle Av, w \rangle = 0$.

Denn aus (*) folgt $Av \in ((\mathbb{R}v)^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$.

Bew. von (*):

Betr. die Abb.

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(\tau) = \sigma v + \tau w \quad , \quad \sigma := \sqrt{1-\tau^2} .$$

Es ist

$$\|\varphi(\tau)\| = \langle \varphi(\tau), \varphi(\tau) \rangle = \sigma^2 + \tau^2 = 1 - \tau^2 + \tau^2 = 1 .$$

$\Rightarrow \varphi(\tau) \in E$.

Deshalb ~~Außerdem~~ ist

$$q(v) \geq q(\varphi(\tau)) = \langle \varphi(\tau), A\varphi(\tau) \rangle = \underbrace{\sigma^2}_{= 1-\tau^2} q(v) + 2\sigma\tau \langle w, Av \rangle + \tau^2 q(w) .$$

für $\tau \neq 0$:

$$\Rightarrow 2\sigma \langle w, Av \rangle \leq \tau \overbrace{(q(v) - q(w))}^{\geq 0} \quad (**)$$

Angenommen $\langle w, Av \rangle \neq 0$.

OBdA $\langle w, Av \rangle > 0$ $\quad (w \mapsto -w)$.

$$\Rightarrow \tau (q(v) - q(w)) \xrightarrow{\tau \to 0} 0 \quad ↯ \ (**)$$

Genauer: a) Falls $q(v)-q(w)=0$ ist der Wid. klar.

b) $\tilde{\varphi}(\tau)=\frac{\tau}{2\underbrace{\sqrt{1-\tau^2}}_{=6}}$ ist stetig ~~auf~~ $\cancel{[0,1)}$ $(-1,1)$ (z.B.)

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon := \cancel{\langle v, Aw\rangle}\ \frac{\langle w, Av\rangle}{q(v)-q(w)} > 0$

ex. $\delta > 0$, s.d.

$$\tilde{\varphi}(\tau) < \varepsilon$$

für $|\tau| < \delta$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\langle w, Av\rangle}{q(v)-q(w)} = \varepsilon > \tilde{\varphi}(\tau)$$

Aber nach (**) ist $\frac{\langle w, Av\rangle}{q(v)-q(w)} \leq \tilde{\varphi}(\tau)$ $\lightning$.

$\Rightarrow$ Beh. ■

Es folgt hieraus auch:

Ist λ der EW von A mit $Av = \lambda v$, so gilt

$$q(v) = \langle Av, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=1} = \lambda \qquad \square$$

Satz 4 (Spektralsatz)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eukl. Vektorraum und $f: V \to V$ selbstadj. Endomorphismus.
Dann hat V eine ONB $e_1, \dots, e_n$ aus Eigenvektoren von f,
$$f(e_i) = \lambda_i e_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}).$$

Bew: Wie im unitären Fall, aber unter Benutzg des Lemmas.

(1) Lemma: f hat EV v_1 mit EW λ_1 und $\|v_1\| = 1$.

(2) $W := (\mathbb{R}v_1)^\perp$. $V = \mathbb{R}v_1 \oplus (\mathbb{R}v_1)^\perp$ (Satz 2)
$(W, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{W\times W})$ ist eukl. VR.
Wende Lemma auf W an. $\square$