Bew: „$\Rightarrow$" klar (wie Bem 1).

„$\Leftarrow$" Wir können nach i) P_f schreiben als

$$P_f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r)^{n_r} \in K[x],$$

wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ die paarw. versch. Nullst. von P_f sind und $n_i = \mu(P_f,\lambda_i)$ die alg. Vielfachheit von λ_i.

Es gilt $n = \mathrm{Grad}(P_f) = n_1+\ldots+n_r$.

Nach ii) ist $n_i = \dim \mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$.

Sei $v_1^{(i)},\ldots,v_{n_i}^{(i)}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$ für $i=1,\ldots,r$.
Wir betrachten das n-Tupel von Vektoren aus V:

$$B = (v_1^{(1)},\ldots,v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)},\ldots,v_{n_2}^{(2)},\ldots,v_1^{(r)},\ldots,v_{n_r}^{(r)})$$

Beh: B ist l.u. (und damit Basis von V aus Eigenvektoren).

Bew: Seien $\alpha_j^{(i)} \in K$ ($i=1,\ldots,r$ und $j=1,\ldots,n_i$) mit

$$\alpha_1^{(1)}v_1^{(1)}+\ldots+\alpha_{n_1}^{(1)}v_{n_1}^{(1)} + \alpha_1^{(2)}v_1^{(2)}+\ldots+\alpha_{n_2}^{(2)}v_{n_2}^{(2)} + \ldots + \alpha_1^{(r)}v_1^{(r)}+\ldots+\alpha_{n_r}^{(r)}v_{n_r}^{(r)} = 0$$

Sei $w_i := \alpha_1^{(i)}v_1^{(i)}+\ldots+\alpha_{n_i}^{(i)}v_{n_i}^{(i)} \in \mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$.

$\Rightarrow$ $w_1+\ldots+w_r = 0$

§3 Lemma 4 $\quad w_1 = \ldots = w_r = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \ldots + \lambda_{n_i}^{(i)} v_{n_i}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$

$\Rightarrow \quad \lambda_i^{(j)} = 0 \quad \forall\, i, j$ $\square$

§5 Trigonalisierung

Def: Ein Endomorphismus $f: V \to V$ eines endl. dim K-VR V heißt **trigonalisierbar**, falls V eine Basis $\mathcal{B}$ besitzt, so daß

$$A := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix ist.

Satz 1.
f ist trigonalisierbar genau dann wenn $P_f(x) \in K[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Bew: „$\Rightarrow$" klar.
„$\Leftarrow$" Es sei $P_f(x) = (x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n)$ (wobei die λ_i nicht verschieden sein müssen).
Sei $0 \neq v_1 \in V$ Eigenvektor von f zu λ_1.
Ergänze zu Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V

Darstellende Matrix

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ 0 & \tilde{A} \end{array}\right)$$

Dabei ist $\tilde{A}$ die darst. Matrix von folgendem End.:

Sei $W = \mathrm{Lin}(v_2, \dots, v_n) \subset V$, $\dim W = n-1$.

Für $w \in W$ gilt

$$f(w) = \underset{\substack{\cap \\ W}}{\tilde{w}} + \underset{\substack{\cap \\ K}}{t(w)} \cdot v_1$$

mit eind. best. $\tilde{w} \in W$ und $t(w) \in K$.

Die Zuord.

$$w \mapsto \tilde{w} =: g(w)$$

definiert einen End. $g: W \to W$.

Die Darst. Matrix von g bezügl. $v_2, \dots, v_n$ ist $\tilde{A}$.

Per Induktion nach n können wir annehmen, daß $\tilde{A}$ obere Dreiecksmatrix ist. $\square$

<u>Kor 2</u>:

Über einem alg. abg. Kpk ist jeder End. eines endl. dim K-VR's trigonalisierbar.

<u>Bem</u>: Trigonalisierung ist nicht eindeutig.

Bsp: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Frage: Kann man durch zusätzliche Bed. erreichen, daß die Transformation auf obere Dreiecksgestalt eindeutig wird?

Def: Eine $r \times r$ Matrix J heißt Jordanblock zum Eigenwert $\lambda \in K$, falls sie von der Form ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Bsp:

$r = 1$ $\quad (\lambda)$

$r = 2$ $\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$r = 3$ $\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\vdots \qquad \vdots$

Def: Eine Matrix aus $K^{n \times n}$ ist in Jordanscher Normalform, falls sie eine Block-Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix}$$

ist, wobei die J_i Jordanblöcke sind (möglicherweise unterschiedlicher

Größe).

Satz 3 (Jordansche Normalform).
Sei $f: V \to V$ Endomorphismus.
Wenn $P_f \in K[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so daß

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

in Jordanscher Normalform ist.

Die Jordansche Normalform-Matrix ist dann durch f (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) eindeutig bestimmt.

§6 Euklidische Vektorräume

Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist das Standard-Skalarprodukt def durch

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle x,y \rangle = x^t \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \,.$$

Diese Abbildung ist linear in jeder Variablen, symmetrisch ($\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$) und es gilt $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Wir wollen vergleichbare Abbildungen allgemeiner betrachten.

<u>Def</u>: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR.
Ein <u>euklidisches Skalarprodukt</u> auf V ist eine Abb $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

i) Für festes $y \in V$ ist $x \mapsto \langle x,y\rangle$ eine lineare Abb $V \to \mathbb{R}$.

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall\, x,y \in V$ (Symmetrie)

iii) Es gilt $\langle x,x\rangle > 0 \quad \forall\, x \in V \setminus \{0\}$
("positiv definit").

Ein <u>Euklidischer VR</u> ist ein Paar $(V, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-VR V und einem euklidischen Skalarprodukt auf V.

- Wegen ii) ist auch für festes $x \in V$

die Abbildung $y \mapsto \langle x, y \rangle$ linear.

Bez: • $x, y \in V$ heißen orthogonal zueinander, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Schreibe $x \perp y$.

• Die euklidische Norm von $x \in V$ ist def als
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

• $x_1, \dots, x_m \in V$ heißen Orthogonalsystem, falls $x_i \neq 0 \; \forall i$ und $x_i \perp x_j \quad \forall i \neq j$.

• $x_1, \dots, x_m \in V$ heißen Orthonormalsystem, falls
$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j.$$

Bem 1: Jedes Orthogonalsystem ist l. u.

Bew: Sei $x_1, \dots, x_m$ Orthogonalsystem und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0.$$

Skalarprodukt mit x_j:
$$\lambda_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_j = 0$. $\square$

Lem 2: Sei V endl. dim euklidischer VR. Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$, wobei $m < \dim V$.
Dann ex $0 \neq v \in V$ mit $\langle v, v_i \rangle = 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$.

Bew.: Sei $b_1, \ldots, b_n$ Basis von V.
Ansatz: $v = \tau_1 b_1 + \ldots + \tau_n b_n$, $\tau_i \in \mathbb{R}$.
Wir suchen $v \neq 0$ mit

$$\begin{aligned} \langle v_1, v \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle v_m, v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Dies liefert ein homogenes lin. Gl-System für n Variablen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ mit $m < n$ Gleichungen.
$\Rightarrow \exists$ nicht-triviale Lsg. $\square$

Satz 3: Jeder endlich dim. eukl. VR besitzt eine Orthonormalbasis.

Bew: Mit Lem 2 finden wir induktiv eine Orthogonalbasis $v_1, \ldots, v_n$.
Dann ist $\frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}$ ONB. $\square$