$\Rightarrow \quad \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$

Andererseits können wir (*) mit λ_r multiplizieren und erhalten

$$\alpha_1 \lambda_r v_1 + \alpha_2 \lambda_r v_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r = 0$$

$\Rightarrow \quad \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_r) v_2 + \dots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} = 0$

$v_1, \dots, v_{r-1}$ l.u.

$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$

(Hier haben wir benutzt, daß die λ_i paarw. versch. sind.)

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \lambda_r = 0$, ↯ zur Annahme, daß (*) eine nicht-triv. Lin.-komb. der 0. $\square$

Dies ist wichtig!

Satz 5: (Ein hinreichendes Kriterium)
Sei V ein K-VR der Dim n und $f: V \to V$ ein Endomorphismus. $P_f(x)$ besitze n verschiedene Nullstellen in K.
Dann gibt es eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

Bew: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Nullst. von P_f (also die Eigenwerte von f).
Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Eigenvektoren zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Nach Annahme ~~sind alle~~ λ_i

paarweise verschieden.

$\overset{\text{Lemma 4}}{\Longrightarrow}$ $v_1, \dots, v_n$ sind l.u.

$\overset{\dim V = n}{\Longrightarrow}$ $v_1, \dots, v_n$ sind Basis von V.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix}$

$= X^2 - 4X + 3$

$= (X-1)(X-3)$

$\overset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow}$ A diagonalisierbar.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_A(X) = (X-1)^2$

$\Rightarrow$ 1 Nullst. (mit Vielfachheit 2)

$\Rightarrow$ Mit Satz 5 keine Aussage möglich.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_A(X) = X^2 + 1$

Keine Nullst. in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Mit Satz 5 keine Aussage möglich.

In $\mathbb{C}[X]$: $P_A(X) = (X+i)(X-i)$

$\overset{\text{Satz 5}}{\Longrightarrow}$ Über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Frage: Wann hat das char. Pol $P_f(X)$ n verschiedene Nullstellen in K?

Antw: Dies hängt vom Grundkörper K ab.

Im allgemeinen muß ein Pol gar keine Nullst. in K haben.

Bsp: $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Def: Ein Körper K heißt <u>alg. abgeschlossen</u>, falls sich jedes Pol $P \in K[X]$ vom Grad n in der Form
$$P(X) = C \cdot (X-\alpha_1)\cdot(X-\alpha_2)\cdot \ldots \cdot (X-\alpha_n)$$
schreiben läßt, wobei $C \in K$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Bem: i) Dann sind $C, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eindeutig durch P bestimmt. (Übung). Bsp: C = führender Koeff.
ii) Die Nullstellen sind genau die α_i.
iii) Die α_i müssen nicht versch. sein.

Def: Ist $0 \neq P \in K[X]$ ein Pol (wie oben) und ist $\alpha \in K$, so heißt
$$\mu(P,\alpha) = \{ r \in \mathbb{N}_0 ; \ P(X) = (X-\alpha)^r \cdot Q(X) \text{ für ein } Q(X) \in K[X] \}$$
die <u>Vielfachheit</u> von α in P.

α Nullst. von $P \Leftrightarrow \mu(P,\alpha) > 0$

Bem 7: Ein Pol $P \in K[X]$ vom Grad $n \geq 0$ über einem alg. abg. Körper K hat genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt).

~~Funda~~

Satz 8: (Fundamentalsatz der Algebra) Der Körper $\mathbb{C}$ ist alg. abg.!

Bew: → Funktionentheorie, Algebra II

„Folgerung": Über $\mathbb{C}$ lassen sich „mehr" Matrizen diagonalisieren als über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$.

Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium

Sei K Körper mit ∞ vielen El., z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

V K-VR der Dim $n \in \mathbb{N}$.

$f: V \to V$ Endomorphismus

$P_f(x) = \det(X \cdot id_V - f) \in K[x]$ das char. Pol.

Sei $\alpha \in K$ Nullstelle von P_f

($\Leftrightarrow$ α ist Eigenwert von f.)

Def: Sei $\alpha \in K$.

Die algebraische Vielfachheit von α (in P_f) ist

$$\mu(P_f, \alpha) := \max\{r \in \mathbb{N}_0 ;\ P(x) = (x-\alpha)^r \cdot Q(x) \text{ mit } Q(x) \in K[x]\}$$

Es gilt $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mu(P_f, \alpha) > 0$.

Der Eigenraum von f bezüglich α ist definiert als

$$Eig(f, \alpha) = \{v \in V;\ f(v) = \alpha v\}.$$

§4 Kriterien für Diagonalisierbarkeit

K Körper ($\# K = \infty$). z.B.: $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
V K-VR der Dim $n \in \mathbb{N}$
$f: V \to V$ Endomorphismus
$P_f(x) = \det(X \cdot id_V - f) \in K[x]$ char. Pol.
- normiertes Pol vom Grad n.

Wann ist f diagonalisierbar?
$\Leftrightarrow$ Wann besitzt V eine Basis von Eigenvektoren von f?

Bem 1:
Wenn f diagonalisierbar ist, so hat P_f n Nullstellen in K (mit Vielfachheiten gezählt). Dann zerfällt P_f in Linearfaktoren in $K[x]$.

- Dieses Kriterium ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Bew:
Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V aus Eigenvektoren. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zug. Eigenw.

$$\Rightarrow \quad M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n). \quad \square$$

Bem 2:
Das char. Pol $P_f(x)$ habe n paarweise versch. Nullst. in K.
Dann ist f diagonalisierbar.

Bew: §3, Satz 5. $\square$

- Dieses Krit. ist hinreichend, aber nicht notwendig.

Ziel: Kriterium, das hinr. <u>und</u> <u>notw.</u> ist.

Def: Sei $\alpha \in K$.
Die <u>algebraische Vielfachheit</u> von α in P_f ist

$$\mu(P_f, \alpha) = \max\{r \in \mathbb{N}_0 ; \ P(x) = (x-\alpha)^r \cdot Q(x) \text{ mit } Q(x) \in K[x]\}$$

- Es gilt $P(\alpha) = 0 \iff \mu(P_f, \alpha) > 0$.

Der <u>Eigenraum</u> von f zu α ist def. als

$$\mathrm{Eig}(f, \alpha) = \{v \in V ; f(v) = \alpha \cdot v\} \subset V$$

- Dies ist Unter-VR von V.
- Die Berechnung von $\mathrm{Eig}(f, \alpha)$ besteht in der Lsg einer lin. Gl-Systems.

Es gilt:

α ist Eigenwert von f $\iff$ $\mathrm{Eig}(f,\alpha) \neq \{0\}$

$\iff \dim \mathrm{Eig}(f,\alpha) > 0$.

Die <u>geometrische Vielfachheit</u> von α (bezüglich f) ist definiert als

$$\dim \mathrm{Eig}(f,\alpha).$$

<u>Bem 3</u>: Es gilt stets

$$\mu(P_f,\alpha) \geq \dim \mathrm{Eig}(f,\alpha).$$

<u>Bew</u>: Sei $v_1,\dots,v_r$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(f,\alpha)$.

Ergänze diese zu einer Basis

$$B = (v_1,\dots,v_r, v_{r+1},\dots,v_n)$$

von V.

Die Koordinatenmatrix von f bezügl B hat die Form

$$A := M_B^B(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \alpha & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, r \\ \\ \\ \}\, n-r \end{array}$$

$$\Rightarrow P_f(x) = (x-\alpha)^r \cdot \det(x \cdot E_{n-r} - A')$$

$$\Rightarrow \mu(P_f,\alpha) \geq r. \qquad \square$$

<u>Bsp</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f = f_A$.

$P_A(x) = x^2$

$\Rightarrow$ A hat den Eigenwert 0.

$\mu(P_A, 0) = 2$.

<u>Eig(A, 0)</u>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, 0) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}(A, 0) = 1.$$

<u>Satz 4</u>:

Der Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ ist diagonalisierbar genau dann wenn

i) $P_f(x)$ zerfällt in $K[x]$ vollständig in Linearfaktoren (hat also mit Vielfachheiten genau $n = \dim V$ Nullstellen in K) <u>und</u>

ii) für jede Nullstelle α von $P_f(x)$ gilt $\mu(P_f, \alpha) = \dim \mathrm{Eig}(f, \alpha)$.

- Dieses Kriterium ist hinreichend und notwendig.