Satz 1: Es sind äquivalent:

i) $\lambda \in K$ ist Eigenwert von f (zu einem geeigneten Eigenvektor).

ii) $\det(f - \lambda\, id_V) = 0$

iii) Ist A die Matrix von f bezügl einer gewählten Basis, so gilt $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

Bew ii $\Leftrightarrow$ iii: klar

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\lambda \in K$ Eigenwert von f zum Eigenvektor $v \in V$.

$\Rightarrow \quad f(v) = \lambda \cdot v$

$\Rightarrow \quad f(v) - \lambda \cdot v = 0$

$\Rightarrow \quad (f - \lambda \cdot id_V)(v) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot id_V) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \quad f - \lambda \cdot id_V : V \to V$ ist nicht invertierbar

$\Rightarrow \quad \det(f - \lambda\, id_V) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $\det(f - \lambda id_V) = 0$

$\Rightarrow$ $f - \lambda id_V$ ist nicht invertierbar

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_V) \neq \{0\}$

$\Rightarrow$ $\exists \; 0 \neq v \in \mathrm{Kern}(f - \lambda id_V)$.

$$\Rightarrow \quad f(v) - \lambda\, id_V(v) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(v) = \lambda v$$

$\Rightarrow$ λ ist Eigenwert zu v. $\square$

Folgerung:

Um die Eigenwerte von f zu finden, muß man die Funktion

$$P_f : K \to K, \quad \lambda \mapsto P_f(\lambda) = \det(\lambda\, id_V - f) = \det(\lambda \cdot E - A)$$

betrachten.

Kor 2: $\lambda \in K$ ist Eigenwert von f
$\Leftrightarrow$ $P_f(\lambda) = 0$.

(*) ~~Die Funktion P_f ist eine Polynomfunktion im folgenden Sinne.~~

(*) Bsp: • $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$P_A(\lambda) := P_{f_A}(\lambda) = \det(-A + \lambda \cdot E) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

$\Rightarrow$ A hat einen Eigenwert, nämlich 0.

• $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda & +1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

$\Rightarrow$ A hat keinen reellen EW, aber kompl. EW $\pm i$.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ A hat die EW $1, 3$.

Die Funktion χ_f ist Polynomfunktion im folgenden Sinne.

§2 Polynomfunktionen

Ab jetzt wollen wir annehmen, daß K unendlich viele Elemente enthält (z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

__Def__: Eine Abbildung $P: K \to K$ heißt __Polynomfunktion__ (über K), wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in K$ gibt, so daß

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad \forall x \in K.$$

Die Menge der Polynomfunktionen $P: K \to K$ wird mit $\mathrm{Pol}(K)$ bezeichnet. Sie ist ein K-VR.

__Lemma 1__: Eine Pol.-Funktion

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (a_0, \ldots, a_n \in K)$$

mit $a_n \neq 0$,

hat höchstens n Nullstellen in K

(d.h. Lösungen der Gl $P(\lambda) = 0$).

<u>Bew</u>: Induktion nach n

<u>$n=0$</u>: Hier ist $P(x) = a_0 \neq 0$.

$\Rightarrow$ keine Nullstelle. ✓

<u>$n>0$</u>: Die Beh. sei bewiesen für $n-1$.

Falls P keine Nullst. hat: fertig.

Sei also $\lambda \in K$ eine Nullst. von P,

$$P(\lambda) = 0.$$

Wir betrachten die Funktion

$$Q(x) = P(x+\lambda).$$

Binomische Formel:

$$(x+\lambda)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j \lambda^{k-j}$$

$$= x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} \lambda + \ldots + \lambda^k$$

$\Rightarrow Q(x)$ ist Polynomfunktion mit

$$Q(x) = a_0 + a_1(x+\lambda) + \ldots + a_n(x+\lambda)^n$$

$$= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

und $b_n = a_n \neq 0$.

Es gilt $b_0 = Q(0) = P(\alpha) = 0$.

$$\Rightarrow \quad Q(x) = x \cdot \underbrace{(b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1})}$$

hat eine Nullst. — hat $\leq n-1$ Nullst. nach Induktionsannahme

$$\Rightarrow \quad P(x) = Q(x-\alpha) = (x-\alpha) \cdot \overbrace{(b_1 + b_2(x-\alpha) + \ldots + \underbrace{b_n}_{=a_n \neq 0}(x-\alpha)^{n-1})}$$

$\Rightarrow \quad P(x)$ hat $\leq n$ Nullst. $\square$

Satz 2:

Falls eine Polynomfunktion $P: K \to K$,
$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$,
identisch verschwindet, so sind alle Koeff. gleich Null, also

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Bew:

Nach unserer Annahme hat K unendlich viele Elemente.
$P(x) = 0 \quad \forall x \in K$
$\Rightarrow$ P hat so viele Nullstellen.
$\overset{\text{Lemma 1}}{\Rightarrow}$

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0. \qquad \square$$

Kor 3: Seien $P, Q: K \to K$ Pol-Fn.
mit
$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $\quad a_n \neq 0$,
$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $\quad b_m \neq 0$.

Falls $P(x) = Q(x) \quad \forall x \in K$,
so gilt $n = m$ und
$a_i = b_i \quad \forall i$.

Bew: Wende Satz 2 an auf $P - Q$. $\square$

Def: Sei $P : K \to K$ eine Polynomfunktion,
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$$
(Nach Kor 3 sind n und die a_i durch P eind. bestimmt.)
Die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt Grad von P.
Schreibe $n = \text{Grad}(P)$
Vereinbarung: $\text{Grad}(\text{Nullpolynom}) = -\infty$.

Bem: Satz 2 und Kor 3 sind in endlichen Körpern falsch.
z.B. stellen
$$P(x) = x^2 + x$$
$$Q(x) = 0,$$
die selbe Polynomfunktion $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ dar.

Aus diesem Grund führt man in der Algebra den Begriff des

Polynoms ein.

Dort ist ein Polynom über K gegeben durch die Koeffizienten $(a_0, a_1, \ldots)$.

Ein Polynom ist also eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Zahlen in K, wobei $a_i = 0$

- für fast alle $i \in \mathbb{N}_0$ (d.h. für alle bis auf endl. viele).

Dann definiert man noch wie man Polynome addiert und multipliziert und gelangt so zum „Polynomring" $K[X]$ über K.

- Man stellt sich Polynome als formale Summen $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ vor.

Für unendliche Körper ist wegen Vor 3 der Begriff des Polynoms äquivalent zum Begriff der Polynomfunktion.

Daher werden wir im folgenden

nur noch das kürzere Wort „Polynom" gebrauchen.

Bem 4: Sei $P \neq 0$ ein Polynom über K. Sei $\alpha \in K$ mit $P(\alpha) = 0$.
Dann ex Pol Q mit

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) \quad \forall x \in K,$$
$$\text{Grad}(Q) = \text{Grad}(P) - 1.$$

Bew: Wie Lemma 1 (Übung). □

§3 Das charakteristische Polynom

K habe so viele Elemente.
Schreibe auch $K[X] = \text{Pol}(K)$ für den K-VR der Polynome über K.

Sei V ein K-VR der Dimension n.
Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus.

Def: Das charakteristische Polynom von f ist def als

$$P_f(X) = \det(X \, id_V - f).$$

Bem 1: $P_f(X)$ ist ein normiertes Polynom vom Grad $n = \dim V$ über K. (Normiert heißt, daß der führende Koeff $= 1$ ist, also $P_f(X) = X^n +$ Terme niedrigeren Grades)

Bew: Def + Leibnizformel. $\square$

Für $A \in K^{n \times n}$ definiert man analog

$$P_A(X) = \det(X \cdot E - A).$$

Satz 2:
Sei $A \in K^{n \times n}$ und

$$P_A(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n$$

das char. Pol. Es gilt

$$\alpha_n = 1$$
$$\alpha_{n-1} = -\mathrm{Spur}(A)$$
$$\alpha_0 = (-1)^n \cdot \det(A).$$

Bew: $\alpha_n = 1$: Bem 1

$$\alpha_0 = P_A(0) = \det(E \cdot 0 - A) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A).$$

α_{n-1} : Bew mit Leibniz-Formel (Übung). $\square$

Als Pol vom Grad n hat das char. Pol. P_A höchstens n Nullst. in K. (§2 Lemma 1).
Nach §1, Kor 2, sind die Nullstellen von P_A genau die Eigenwerte von A. =>

Kor 3 $A \in K^{n \times n}$ hat höchstens n Eigenwerte.

Analog für Endomorphismen $f: V \to V$.

Lemma 4:
Seien $v_1, \dots, v_m \in V$ Eigenvektoren eines Endomorphismus $f: V \to V$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$.
Dann sind $v_1, \dots, v_m$ l.u.

Bew: Angenommen nicht.
=> $m \geq 2$. (Da Eigenvektoren $\neq 0$.)
Dann ex $2 \leq r \leq m$, so daß
$v_1, \dots, v_{r-1}$ l.u. und
$v_1, \dots, v_r$ linear abhängig sind.

Sei (*) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination ($\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$, nicht alle $= 0$).

Wende f an.