Aus der Leibnizformel folgt leicht

$\det\begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix} = 1$.

$\Rightarrow f(D) = \det(D)$.

2) Setze nun für festes D die Fkt $K^{r\times r} \to K$

$$g(A) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{1, Satz 5}}{\Rightarrow} g(A) = \det A \cdot \det\begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & D\end{pmatrix}$$

$$\overset{1)}{=} \det(A) \cdot \det(D). \qquad \square$$

Lemma 4 Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$.
Mit den Bez. von Satz 2 gilt

$$\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Spalte}}}{e_i}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

wobei $e_i \in K^n$ der i-te Einheitsvektor ist.

Bew:
Nach Lemma 3 ist

$$\det A_{ij} = \det\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_{ij} \\ 0 & \end{array}\right).$$

Durch $(j-1)$ Vertauschungen benachbarter Spalten und $i-1$ Vert. benachbarter Zeilen bringt man die Matrix rechts in die Form

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ * & \cdots & * & 1 & * & \cdots & * \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \uparrow & \\ j\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Dabei sind die Einträge außerhalb der i-ten Zeile und der j-ten Spalte gleich den Einträgen von A.

Wählt man $*$ geeignet, so ist diese Matrix $= (a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots)$.

Folglich gilt

$$\det A = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \cdot \det(a_1, \dots, a_j, e_i, a_{j+1}, \dots).$$

$\square$

__Lemma 5:__

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$.

Sei $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in K^{n \times n}$ die zu A komplementäre Matrix, definiert durch

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Dann gilt $\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n$.

__Bew:__ Für $\tilde{A} \cdot A$ ($A \cdot \tilde{A}$ analog).

Der (i,k)-Eintrag von $\tilde{A} \cdot A$ ist gleich

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

$$\overset{\text{Lemma 4}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$= \det\Big(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j, a_{i+1}, \dots, a_n\Big)$$

$$= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{a_k}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$= \delta_{ik} \cdot \det(A). \qquad \square$$

$$\left(\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}\right)$$

<u>Korollar 6:</u>

$A \in K^{n \times n}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ und

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}.$$

<u>Bsp:</u> Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

<u>Beweis</u> von Satz 2:

In der Formel $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n$ betrachten wir den (i,k)-ten Matrix-Eintrag:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{a}_{jk} = \det(A) \cdot \delta_{ik}$$

Für $i = k$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = \det(A)$ $\square$

Bem 7:
Ebenso kann man für $A \in K^{n\times n}$ $\det(A)$ nach der j-ten Spalte entwickeln:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Bem 8: (Elementare Spaltenumformungen)
Sei $A \in K^{n\times n}$.

i) B entstehe aus A durch Addition des λ-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte. Dann gilt $\det(B) = \det(A)$

ii) B entstehe aus A durch Vertauschung zweier Spalten. Dann gilt $\det(B) = -\det(A)$

iii) B entstehe aus A durch Mult der i-ten Spalte mit $\lambda \in K$. Dann gilt $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$.

Bew: ii): det alternierend
iii): det linear in i-ter Spalte
i): Folgt aus Multilinearität + alt.:

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n) + \underbrace{\lambda \det(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te}}}{a_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te}}}{a_j}, \dots)}_{=0}$$

$$= \det(a_1, \dots, a_n) + \det(\dots, \lambda a_j, \dots, a_j, \dots)$$

$$= \det(\dots, a_i + \lambda a_j, \dots). \quad \square$$

Bem: Genauso für el. Zeilenumformungen.

Praktische Berechnung der Determinante:

- Man bringe $A \in K^{n\times n}$ durch el. Zeilenumformungen u. Spaltenvertauschungen auf Normalform
- Man führe Buch über Faktoren λ und die Anz. der Vertauschungen
- Benutze $\det B = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} b_{11} \ddots & * & \\ 0 & b_{rr} & * \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$$

§3 Die Determinante eines Endomorphismus

Sei V endl. dim. K-VR.

Ein Endomorphismus von V ist eine K-lin Abb $f: V \to V$.

Ist f bijektiv, so heißt f auch Automorphismus.

Bez: $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$,

$\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{Iso}(V, V)$.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

Ziel: Definiere $\det(f)$.

Dazu: Wähle Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V. Betrachte die darstellende Matrix

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Definiere $\det(f) = \det(A)$.

<u>Problem</u>:

Was passiert, wenn ich andere Basis $\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_n')$ von V wähle.

Erhalte
$$A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f), \quad \det(A').$$

<u>Aber</u>:

Mit der Basiswechselmatrix $S = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ gilt
$$A' = SAS^{-1} \qquad (\text{Kap. III}, \S 5, \text{Kor } 5)$$

$$\Rightarrow \det(A') = \det(S) \cdot \det(A) \cdot \det(S^{-1})$$
$$= \det(A) \cdot \det(S \cdot S^{-1})$$
$$= \det(A).$$

$\Rightarrow$ $\det(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis von V.

$\Rightarrow$ <u>Bem 1</u>:

Es gibt eine und best. Abb. $\det: \mathrm{End}(V) \to K$ mit der Eigenschaft: Wird f bezüglich irgendeiner Basis $\mathcal{B}$ von V durch

$A \in K^{n\times n}$ dargestellt, so gilt

$$\det f = \det A .$$

[D.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(V) \arrow[r] \arrow[d, "f \mapsto M_B^B(f)"'] & K \\ K^{n\times n} \arrow[ur, "A \mapsto \det A"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.]

__Bem 2__: Für $f, g \in \mathrm{End}(V)$ gilt $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$

__Name__: Determinantenmultiplikationssatz. $\square$

__Bez__: $GL(V) = \{ f \in \mathrm{End}(V) ;\ f \text{ invertierbar} \}$

„Lineare Gruppe von V"

„Automorphismengruppe von V" $= \mathrm{Aut}(V)$

__Bem 3__: Sei B eine Basis von V. Dann definiert $f \mapsto M_B^B(f)$ einen Gruppenisom. $GL(V) \to GL_n(K)$.

__Bem 4__: $f \in \mathrm{End}(V)$ ist invertierbar $\iff \det(f) \neq 0$.

Die Zuord. $f \mapsto \det(f)$ definiert einen Gruppenhom

$$GL(V) \longrightarrow K^* .$$

V Eigenwerte und Eigenvektoren

§1 Diagonalisierbarkeit

Sei K Körper,
V ein endl. dim K-VR.
Sei $f: V \to V$ ein <u>Endomorphismus</u>,
d.h. eine K-lin Abb von V nach V.
Ist $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V,
so können wir f durch die Koordinaten Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in K^{n \times n}$ darstellen.
Dabei ist $A = (a_{ij})$,

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i .$$

<u>Frage</u>: Kann man $\mathcal{B}$ so wählen, daß A besonders „einfach" wird?
Anders ausgedrückt:
Gibt es ein Koordinatensystem in V, in dem sich f „einfach" darstellen läßt?

Was heißt hier einfach?

Wir wollen, daß A Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Das bedeutet

$$f(b_j) = a_{jj}\, b_j \qquad \forall j = 1, \dots, n.$$

Das heißt f bewirkt eine Streckung um a_{jj} in Richtung b_j.

<u>Genauere Frage</u>:

Sei $f: V \to V$ Endom. von V.
Gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V, so daß die darstellende Matrix

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

Diagonalmatrix ist?

<u>Äquivalente Frage</u>:

Sei $A \in K^{n \times n}$. Gibt es $S \in GL_n(K)$, so daß

$$S A S^{-1}$$

Diagonalmatrix ist?

In diesem Fall sagt man, daß A diagonalisierbar ist.

[Die Äquivalenz der beiden Fragen sieht man, indem man S als Basiswechselmatrix interpretiert.]

<u>Achtung</u>: • Es gibt Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind.

• Es gibt Matrizen $A \in K^{n\times n}$, die nicht diagonalisierbar sind über K, die aber über einem größeren Körper $L \supset K$ diagonalisierbar sind.

<u>Bsp</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist nicht DB.

<u>Bew</u>: Ang es ex $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad SA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det(\quad) = \lambda_1\lambda_2 \underbrace{(ad - bc)}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0$

Ang $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \det S = 0$ ↯

Ang $\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \det S = 0$ ↯

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow a = c = 0$ ↯

Folglich kann es S nicht geben. □

Bsp $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.
A ist jedoch diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

Bew: Über $\mathbb{R}$:
Ang es ex $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad SA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \overset{\det}{\Rightarrow} \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b = \lambda_1 a \text{ und } -a = \lambda_1 b \quad \overset{\lambda_1\lambda_2 = 1}{\Rightarrow} b \neq 0$$

$$\Rightarrow b = -\lambda_1^2 b$$

$$\overset{b \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_1^2 = -1 \qquad \text{keine Lsg in } \mathbb{R}.$$

In $\mathbb{C}$ hat diese Gl jedoch die Lsg $\lambda_1 = i$.

In der Tat ist

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ für}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist diagonalisierbar.

Es gilt für $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, daß

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Frage der Diagonalisierbarkeit nun genauer untersuchen.

Ist die darst. Matrix von $f: V \to V$ bezügl der Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ diagonal, so gilt

$$f(b_i) = \lambda_i b_i \qquad (\lambda_i \in K).$$

Dies führt zu.

<u>Def</u>: Sei $f: V \to V$ Endom. von V. Ein Vektor $v \in V$ heißt <u>Eigenvektor</u> von f, falls

i) $v \neq 0$

ii) es gibt $\lambda \in K$ mit

$$f(v) = \lambda \cdot v.$$

Der Skalar $\lambda \in K$ heißt dann <u>Eigenwert</u> von f (zum Eigenvektor v).