IV Die Determinante

§1 Die Leibniz-Formel

Ziel: Sei $A \in K^{n \times n}$. Wir wollen Kriterium dafür, ob A invertierbar ist (d.h. $\in GL_n(K)$). Falls ja, was ist A^{-1}?
Finde Abb. $K^{n \times n} \to K$, mit der man dies entscheiden kann.
(„Determinante")

Bsp: $n=1$: $\quad K^{1 \times 1} = K \qquad \det(a) = a$.

$n=2$: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ definiert man
$$\det(A) = ad - bc \quad \in K.$$

Bem 1: $A \in K^{2\times 2}$ ist invertierbar $\iff \det(A) \neq 0$.
Dann ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Bew: „$\Leftarrow$": Sei $\det A \neq 0$.
Dann gilt
$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A)\cdot \mathbb{1}_2$$
$\Rightarrow$ A invertierbar u. Formel.

„$\Rightarrow$": Sei A invertierbar. ZZ: $\det A \neq 0$
Dies folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 2:
Für $A, B \in K^{2\times 2}$ gilt
$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
Insbesondere definiert det einen Gruppenhom $\det: GL_2(K) \to K^*$.

Bew: Nachrechnen. $\square$

$n=3$:
Hier kommt man (nach einer Weile) auf die Def für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{daß:}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

das genügt leider.

$n \geq 4$?
Was ist die Struktur der Formel für $n = 2, 3$?

Die Summanden sind von der Form

$$a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

mit $\sigma \in S_n$.
Das Vorzeichen ist $\operatorname{sgn}(\sigma)$.
Dies führt zu:

Def: (Leibniz-Formel)
Die Determinante einer $n\times n$ Matrix $A=(a_{ij})$ ist def durch

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

Bem.: • Für $n=1,2,3$ ist dies unsere vorherige Def.
• Die Summe hat $n!$ Summanden.
$10! = 3628800$
$20! \approx 2{,}4\cdot 10^{18}$
$30! \approx 2{,}7\cdot 10^{32}$
• Falls n groß ist, so ist dies praktisch sehr aufwendig.
$\Rightarrow$ Um $\det(A)$ zu verstehen, muß man die Struktur genauer untersuchen.

Wir bezeichnen die Spalten von $A=(a_{ij})\in K^{n\times n}$ mit $a_1,\dots,a_n$. Also z.B.

$$a_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}.$$

Def: Eine Fn. $f: K^{n\times n}\to K$ heißt linear in der k-ten Spalte, falls für beliebige feste Spalten
$a_1,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_n$
die Funktion $g: K^n\to K$

$$g(x)=f(a_1,\dots,a_{k-1},x,a_{k+1},\dots,a_n)$$

linear ist. d.h. $g(x+y)=g(x)+g(y)$ und $g(\lambda x)=\lambda g(x)$ für $x,y\in K^n$, $\lambda\in K$

<u>Def</u>: Eine Funktion

$$f: K^{n\times n}\longrightarrow K$$

heißt alternierende Multilinearform (der Spalten), falls gilt:

i) f ist linear in jeder Spalte

ii) vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen von f, also

$$f(\cdots a_i\cdots a_j\cdots)=-f(\cdots a_j\cdots a_i\cdots)$$

(Dabei ist „$\cdots$" fest.)

<u>Bem</u>: ii) ist $\overbrace{\text{äqu}}^{\text{wesentl.}}$ zu ii)': Falls A zwei gleiche Spalten hat, so gilt $f(A)=0$.

<u>Bsp</u>: Für $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in K^{2\times 2}$ ist $\det A$ eine alternierende Multilinearform, denn

- $\det\begin{pmatrix}a+a' & b\\ c+c' & d\end{pmatrix}=(a+a')d-(c+c')b$
  $=ad-bc+a'd-c'b$
  $=\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}a'&b\\c'&d\end{pmatrix}$

- $\det\begin{pmatrix}\lambda a & b\\ \lambda c & d\end{pmatrix}=\lambda ad-\lambda bc=\lambda\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ lin in 1. Spalte.
Für 2. Spalte genauso.

• Alternierend:

$$\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c\end{pmatrix} = bc - ad = -(ad-bc)$$
$$= -\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}.$$

(*) Lem 3

Nun n beliebig:

Satz 4

Die Determinante $\det : K^{n\times n} \longrightarrow K$ (definiert durch die Leibniz-Formel) ist eine alternierende Multilinearform.

Bew:

• det ist lin. in der k-ten Spalte:

$$\det(a_1,\dots,a_{k-1},(a_k'+a_k''),a_{k+1},\dots,a_n)$$

Lem 3

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(k-1)k-1}\,(a'_{\sigma(k),k} + a''_{\sigma(k),k})\, a_{\sigma(k+1),k+1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(k)k}\cdots a_{\sigma(n)n} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots a''_{\sigma(k)k}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \det(a_1,\dots,a_k',\dots,a_n) + \det(a_1,\dots,a_k'',\dots,a_n)$$

(*) Lemma 3:

Sei $A\in K^{n\times n}$, $A=(a_{ij})$.

Dann gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}$$

Was heißt $\det A = \det(A^t)$, wobei

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

die zur A transponierte Matrix ist.

Bew: Für $\tau, \sigma \in S_n$ gilt $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$
(Vertauschung der Faktoren) $= a_{\tau(1),\sigma(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(n),\sigma(\tau(n))}$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})}\, a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \qquad \square$$

Weiterhin gilt

$$\det(a_1, \ldots, \lambda a_k, \ldots, a_n) \overset{\text{Lemma}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot (\lambda a_{\sigma(k),k}) \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$$

$$= \lambda \det(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n).$$

- **det ist alternierend:**

Sei $\tau \in S_n$ die Transposition, die i und j vertauscht

ZZ: $\det(a_1, \ldots, a_n) = -\det(a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)})$

Sei $A_n = \{\sigma \in S_n ; \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ die Alternierende Gruppe.

Dann gilt $S_n = A_n \cup A_n\tau$
und die Vereinigung ist disjunkt.
Für $\sigma \in A_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$
$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = -1$.

Nun ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(\tau(n))}$$

$$= -\left[\sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(\tau(n))} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma\tau(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(\tau(\tau(n)))}\right]$$

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(\tau(n))}$$

$$= \det(a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)}) \qquad \square$$

<u>Satz 5</u>:
Sei $f : K^{n \times n} \to K$ eine beliebige ~~alternierende~~ alternierende Multilinearform der Spalten.
Dann gilt
$$f(A) = \det(A)\, f(E_n) \quad \forall A.$$

<u>Folg</u>: Die Determinante ist die einzige alt. Multilinearform f, die normiert ist, d. h. für die gilt $f(E_n) = 1$.
In diesem Sinne ist die Det. eindeutig bestimmt.

__Bew.:__ Die j-te Spalte a_j von A ist eine Linearkombination der Einheitsvektoren

$$a_j = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + \dots + a_{nj} e_n$$

Aufgrund der Multilinearität von f gilt daher:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot f(e_i, a_2, \dots, a_n)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{n} a_{i_1,1} \cdot a_{i_2,2} \cdot \dots \cdot a_{i_n,n} \cdot f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

Da f alternierend ist, gilt

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0,$$

falls $i_k = i_l$ für ein Paar (k,l) mit $k \neq l$.

Dieser Term ist also $= 0$, es sei denn

$$k \mapsto i_k \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

ist eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$.

Folglich gilt

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} \cdot f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Da f alternierend ist, gilt

$$f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$
$$= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(E_n)$$

$$\Rightarrow f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} f(E_n)$$

$= \det(A) \cdot f(E_n)$ □

§2 Weitere Eigenschaften

Satz 1: (Determinantenmultiplikationssatz)

Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Bew: Sei A fest. Betr. die Funktion $f: K^{n\times n} \longrightarrow K$,

$$f(B) = \det(A\cdot B) = \det(A\cdot b_1, Ab_2, \dots, Ab_n),$$

wobei $B = (b_1, \dots, b_n)$ mit $b_i \in K^n$.

Wegen §1, Satz 4, ist $f(B)$ eine alt. Multilinearform in den Spalten von B.

$$\overset{\text{§1, Satz 5}}{\Longrightarrow} \quad f(B) = \det(B)\cdot f(E_n) = \det(B)\cdot\det(A). \quad \square$$

Satz 2: (Entwicklung nach der i-ten Zeile)

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei A_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix, die man aus A erhält, indem man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht. Dann gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\det A = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Um dies zu beweisen benötigen wir einige Lemmata:

Lemma 3:
Sei $M \in K^{n\times n}$ eine Block-Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in K^{r\times r}$, $D \in K^{(n-r)\times(n-r)}$.
Dann gilt
$\det M = \det A \cdot \det D$.

Übungsaufg.: det f. Dreiecksmatrix)

Bew:
1) Zunächst $A = E_r$.
Die Fkt $f : K^{(n-r)\times(n-r)} \longrightarrow K$,

$$f(D) = \det\begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

ist alternierende Multilinearform in den Zeilen von D.
§3-Satz 5 $\quad f(D) = \det(D) \cdot \det\begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$