Sei daher

$$\lambda_{m+1} f(e_{m+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0$$

mit $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n \in K$.

$$\overset{f \text{ lin}}{\Longrightarrow} \quad f(\lambda_{m+1} e_{m+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad v = \lambda_{m+1} e_{m+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \mathrm{Kern}(f)$$

$$\overset{e_1,\dots,e_m \text{ Basis}}{\Longrightarrow} \quad -v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$$

$$\overset{e_1,\dots,e_n \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(e_{m+1}), \dots, f(e_n) \text{ l.u.}$$

$\Rightarrow$ dies ist Basis vom Bild(f)

$\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = n - m$.

$$\Rightarrow \quad \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = m + (n-m) = n = \dim(V). \quad \square$$

__Kor 4:__

Seien V und W K-VR der gleichen Dimension n. ~~Sei~~ $f: V \to W$ eine lin Abb. Dann sind äqu:

i) f ist injektiv

ii) f ist surjektiv

iii) f ist bijektiv.

• Man vergleiche dies mit der analogen Aussage für bel. Abb $f: M \to M'$ zwischen endl. Mengen mit $\# M = \# M' = n$.

§3 Isomorphismen

Def: Eine lin. Abb $f: V \to W$ heißt Isomorphismus, falls sie bijektiv ist.

Bem 1: Dann ist die Umkehrabb. $f^{-1}: W \to V$ auch linear (und damit Isomorphismus).

Bew: Übung. $\square$

Bem 2: Sei $f: V \to W$ Isomorphismus und $v_1, \dots, v_n \in V$.

i) $v_1, \dots, v_n$ l.u. $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ l.u.

ii) $v_1, \dots, v_n$ erzeugen V $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ erz. W

iii) $v_1, \dots, v_n$ Basis von V $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots, f(v_n)$ Basis von W.

Bew: Übung.

Bem 3: Zwei K-VR V u. W heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus $f: V \to W$ gibt. Schreibe

~~Isomorphie von~~ V

$V \cong W$.

„$\cong$" definiert eine Äquivalenzrelation auf der Mengen der K-VR.

Satz 4: Sei V K-VR und $v_1, \dots, v_n \in V$. Die Abb

$$f: K^n \longrightarrow V, \quad x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

ist linear. Sie ist

i) inj $\iff$ $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh.

ii) surj $\iff$ " Erz.-System

iii) bij $\iff$ " Basis von V.

Bew: klar. $\square$

~~Folg: Jeder~~

Satz 5: Sei V K-VR der Dimension $m < \infty$. Es ist $V \cong K^n \iff n = m$.

Bew: „$\Leftarrow$" Sei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V und $f: K^n \to V$ wie in Satz 4.

$\overset{\text{Satz 4}}{\Longrightarrow}$ f ist Isom.

„$\Rightarrow$" Sei $\dim V = m$ und $g: K^n \to V$ Isom.

Es gilt dann $\dim \mathfrak{A}(\mathrm{Bild}(g)) = \dim V = m$
und $\dim(\mathrm{Kern}(g)) = \dim(\{0\}) = 0$
Dimensionsformel
$$m = n. \qquad \square$$

Folg: Die Dimension legt einen endl dim K-VR bis auf Isomorphie fest.

Bem 6: Satz 4(iii) besagt, daß es das gleiche ist eine Basis eines n-dim VR's V anzugeben, wie einen Isom. $K^n \to V$ anzugeben.

§4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Seien V, W K-VR und $f: V \to W$ eine lin. Abb.

Ziel: Beschreibe f durch eine Matrix.

Dazu müssen wir Basen

$$B = (b_1, \dots, b_n) \quad \text{von } V,$$
$$C = (c_1, \dots, c_m) \quad \text{von } W$$

wählen.

Schreibe $f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \qquad (j = 1, \dots, n)$

mit $a_{ij} \in K$.

Dann ist $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$

f ist durch A eindeutig bestimmt.

Def: Die Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt Koordinatenmatrix der lin Abb f bezüglich der Basen B und C.

Schreibe $A = M_C^B(f)$. ($\to$ Fischer)

Wichtig: A hängt von der Wahl von B, C ab (Wahl der Koordinatensysteme).

Bem 1: • $\mathrm{Hom}(V, W) = \{K\text{-lineare Abb } V \to W\}$

ist K-VR.

· $K^{m\times n}$ ist K-VR. (der Dim $m\cdot n$).

Bem 2: Die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow K^{m\times n}, \quad f \mapsto A = M_C^B(f)$$

ist bijektiv (und K-linear, also K-VR-Isomorphismus).

Bew: f ist durch Angabe von $f(b_j)$ (also der a_{ij}, $i=1,\dots,m$) für $j=1,\dots,n$ eindeutig bestimmt. => Abb inj.
Zu beliebig vorgeg $w_j \in W$ ex ein Abb $f: V \to W$ mit $f(b_j) = w_j$. (§4, Satz 4)
=> Abb ist surj. □

Bsp: Sei $V = K^n$, $W = K^m$, $A \in K^{m\times n}$.
Sei $f_A : K^n \longrightarrow K^m$, $x \mapsto f_A(x) = Ax$,
die A zugeordnete lineare Abb.

Sei $B = (e_1,\dots,e_n)$ die Standard-Basis von K^n,
$C = (e_1',\dots,e_m')$ " " " " K^m.

Was ist $M_C^B(f_A)$?

Was ist $f_A(e_j)$?

Bew: [Wissen: Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & W \arrow[r, "g"] & X \\
K^n \arrow[u, "\varphi_B"] \arrow[r, "x \mapsto Ax"] \arrow[rr, bend right, "x \mapsto A'' x"'] & K^m \arrow[u] \arrow[r, "y \mapsto A' y"] & K^l \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

]

$A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$

ZZ: $A'' = A' \cdot A$ $\quad A'' = (a''_{ij})$

Zeige: j-te Spalte von A'' $= j$-te Sp. v. $A' \cdot A$

j-te Sp. v. $A'' = (a''_{ij})$ ist geg durch

$$(g\circ f)(b_j) = \sum_{i=1}^{l} a''_{ij}\, d_i$$

Andererseits:

$$(g\circ f)(b_j) = g(f(b_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, c_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, g(c_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \sum_{i=1}^{l} a'_{ik}\, d_i$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{m} a'_{ik}\, a_{kj}\right) d_i$$

Koeff-Vergleich $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Def: Sei $f: V \to W$ lin. Abb.
Der Rang von f ist def. als

$$\mathrm{Rang}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f).$$

Bem 7: Seien B, C Basen von V, W und A die zug Koordinatenmatrix von f. Es gilt

$$\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(A).$$

Bew: Wegen Bem 4 gilt

$$\begin{array}{c} V \xrightarrow{f} W \\ K^n \xrightarrow{f_A} K^m \end{array}$$

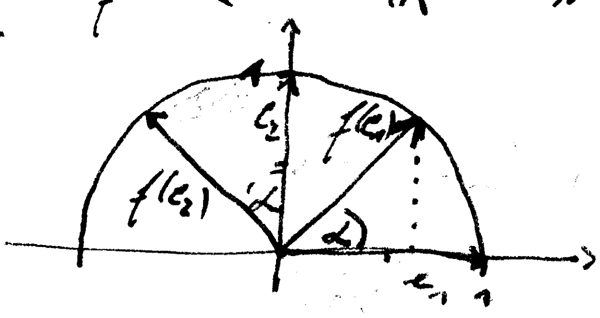
$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}\, f &= \mathrm{Rang}(f_A) \\ &= \dim \{Ax \,;\, x \in K^n\} \\ &= \text{dim des von den Spalten von } A \text{ aufgespannten lin Teilraums von } K^m \\ &= \mathrm{Rang}(A). \end{aligned}$$

$\square$

Bsp: Drehungen im $\mathbb{R}^2$

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Winkel α



$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

§5 Isomorphismen von Vektorräumen und Basiswechsel

<u>Def</u>: Eine $m \times n$ Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt <u>invertierbar</u>, falls $m = n$ und falls es $A' \in K^{n \times n}$ gibt, so daß

$$A' \cdot A = 1_n$$

<u>Schreibe</u>: A^{-1} für die inverse Matrix.

(*) <u>Bem 2</u>: Sei V K-VR der Dim n, W K-VR der dim m, $f: V \to W$ lin Abb. Sei A die Koordinatenmatrix von f bezügl Basen B, C von V, W. Es sind äqu:

i) f ist Isomorphismus

ii) Es ist $m = n$ und Rang $f = n$

iii) A ist invertierbar.

In diesem Falle ist die Koordinatenmatrix von f^{-1} bezügl C, B gleich A^{-1}.

($M^C_B(f^{-1}) = M^B_C(f)^{-1}$)

<u>Bew</u>: $i \Leftrightarrow ii$: §3, Satz 4 + Satz 5.

<u>$i \Rightarrow iii$</u>: Sei f Isom und A' die Koordinatenmatrix von f^{-1} bezügl C, B.

Es gilt $f^{-1} \circ f = id_V$

$$\Rightarrow 1_n = M^B_B(id_V) = M^B_B(f^{-1} \circ f) \overset{§4\ \text{Satz } 6}{=} M^C_B(f^{-1}) \cdot M^B_C(f)$$

$\Rightarrow \quad 1_n = A' \cdot A$

$\Rightarrow$ A invertierbar und $M_B^C(f^{-1}) = A^{-1}$.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei A invertierbar, $A^{-1} \cdot A = 1$

Sei $f_{A^{-1}} : K^n \to K^n$ die zug. lin. Abb,

$f_{A^{-1}}(x) = A^{-1} \cdot x$.

Es ist offenbar f_A Isomorphismus mit $(f_A)^{-1} = f_A^{-1}$.

§3 Bem 4 $\Rightarrow$ f ist Isom. $\square$

(*) Bem 1: Die Menge

$$GL_n(K) = \{A \in K^{n \times n} ; A \text{ invertierbar}\}$$

bildet mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

Sie heißt lineare Gruppe (n-ten Grades) über K.

Bew: Übung

$$f_A(e_j) = A \cdot e_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Stelle} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1j} e'_1 + \dots + a_{mj} e'_m$$

$$\Rightarrow \quad M^B_C(f_A) = A \quad !$$

Bem 3: Die f_A bezüglich der Standard-Basen zug. darstellende Matrix ist A selbst.

Leichte Verallgemeinerung:

Bem 4: Seien V, W K-VR und $f: V \to W$ lin. Abb. Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_m)$ Basen von V bzw W.

Sei σ_B der Isomorphismus

$$K^n \longrightarrow V, \quad x \mapsto \sigma_B(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i,$$

und σ_C der Isom.

$$K^m \longrightarrow W, \quad y \mapsto \sigma_C(y) = \sum_{j=1}^{m} y_j c_j.$$

(→ §3 Satz 4).

Sei $A = M_C^B(f)$.

Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] & V \arrow[r, "f"] & W & C \arrow[l] \\
\text{Koordinatensystem} \arrow[r] & K^n \arrow[u, "\sigma_B"] \arrow[r, "f_A"] & K^m \arrow[u, "\sigma_C"'] & \text{Koord-Syst von } W \arrow[lu] \\
\text{Std-Basis} \arrow[ru] & & & \text{Std-Basis} \arrow[lu]
\end{tikzcd}$$

$$x \mapsto f_A(x) = Ax$$

Das heißt $f \circ \sigma_B = \sigma_C \circ f_A$.

Kor 5: In der j-ten Spalte von A steht der Koordinatenvektor $\sigma_C^{-1}(f(b_j))$ des Bildes des j-ten Basisvektors b_j.

Zeige nun: Verkettung von lin Abb. entspricht dem Produkt von Matrizen.

Satz 6: Seien V, W, X K-VR mit Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $C = (c_1, \ldots, c_m)$, $D = (d_1, \ldots, d_\ell)$.
Seien $f: V \to W$, $g: W \to X$ lin. Abb.
Seien A, A', A'' die Koordinatenmatrizen von $f, g, g \circ f$ bezügl der gewählten Basen.
Dann gilt
$$A'' = A' \cdot A \quad \text{(Matrixprodukt)}$$

<u>Def</u>: Sei V ein K-VR und $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$, $\mathcal{B}'=(b_1',\dots,b_n')$ Basen von V.

Schreibe

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\, b_i' \quad , \quad j=1,\dots,n .$$

Die Matrix $S=(s_{ij}) \in K^{n\times n}$ heißt Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

<u>Bem 3</u>: ii) Sei $f: V \to V$ die lin Abb mit $f(b_j') = b_j$. Es gilt

Ü

$$S = \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$$

i) Es gilt auch $S = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)$.

iii) S ist invertierbar und $S^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)$.

<u>Bew</u>: i, ii folgen direkt aus der Def und iii) aus Bem 2.

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[d, "x \mapsto Sx"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & \\ K^n \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{B}'}"'] & V \end{tikzcd}$$

<u>Satz 4</u> (Transformationsformel)

Seien V, W K-VR und $f: V \to W$ lin Abb. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W.

Sei $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$; $A' = \mathcal{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f)$.

Sei $S = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)$, $T = \mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(id_W)$.

Es gilt $A' = T \cdot A \cdot S^{-1}$.

Bew: Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm und §4, Satz 6:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "A"] \arrow[dr, "\sigma_B"] \arrow[dd, "S"'] & & & K^m \arrow[dl, "\sigma_C"'] \arrow[dd, "T"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[ur, "\sigma_{B'}"'] \arrow[rrr, "A'"'] & & & K^m \arrow[ul, "\sigma_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad A' = T A S^{-1}$.

Kor 5: Sei V K-VR und $f: V \to V$ ein Abb. Seien B, B' Basen von V und $A = M^B_B(f)$, $A' = M^{B'}_{B'}(f)$. Sei $S = M^B_{B'}(\mathrm{id}_V)$ die Basiswechselmatrix von B nach B'. Es gilt

$$A' = S A S^{-1}.$$

Def: i) $A', A \in K^{m \times n}$ heißen *äquivalent*, falls es $S \in GL_n(K)$, $T \in GL_m(K)$ gibt, so daß $A' = TAS^{-1}$

ii) $A', A \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich* (konjugiert), falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, so daß $A' = SAS^{-1}$.

§6 Die allgemeine lineare Gruppe

Sei K Körper.

$GL_n(K) = \{ A \in K^{n \times n} \,;\, A \text{ invertierbar} \}$

ist Gruppe mit Matrix-Mult.

Neutrales El. : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

__Satz 1__: $A \in K^{n \times n}$ ist invertierbar gdw $\text{Rang}(A) = n$.

__Bew__: A invertierbar

$\overset{§5\,\text{Bem}2}{\iff}$ $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ ist Iso

$\overset{§2\,\text{Kor}4}{\iff}$ f_A surj

$\iff$ $\text{Bild}(f_A) = K^n$

$\iff$ $\text{Rang}(A) = n$ $\square$

__Elementarmatrizen__

__Permutationsmatrizen__:

Für $\sigma \in S_n$ sei

$$P_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \qquad \begin{matrix} (e_1, \dots, e_n) \\ \text{Std.-Basis} \end{matrix}$$

$$\in GL_n(K)$$

$$f_{P_\sigma}(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

$$f_{P_{\sigma'}} \circ f_{P_\sigma}(e_j) = f_{P_{\sigma'}}(e_{\sigma(j)}) = e_{\sigma'(\sigma(j))}$$

$$= f_{P_{\sigma' \circ \sigma}}(e_j)$$

$\Rightarrow$ $S_n \to GL_n(K)$, $\sigma \mapsto P_\sigma$

ist Gruppe hom.

Bsp $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{(12)}$

Scherungsmatrizen:

Für $i \neq j$ sei

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \quad = 1_n + E_{ij}$$

$\uparrow$ j-te Spalte

Für $\lambda \in K^*$ sei

$$Q_{ij}(\lambda) = 1_n + \lambda E_{ij} .$$

Spezielle Diagonalmatrizen:

Für $\lambda \in K^*$, $1 \leq i \leq n$, sei

$$S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

Lemma 2: Jede Elementarmatrix ist invertierbar. Es gilt

- $S_i(\lambda)^{-1} = S_i(\lambda^{-1})$
- $Q_{ij}(\lambda)^{-1} = Q_{ij}(-\lambda)$
- $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

Es gilt $Q_{ij}(\lambda) = S_j(\lambda^{-1}) Q_{ij} S_j(\lambda)$.

Beweis: Nachrechnen. $\square$

Bem 3:
Mult einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit Elementarmatrix E von $Gl_m(K)$ links bewirkt eine entsprechende el. Zeilenumformung.

$S_i(\lambda) \cdot A$: Mult der i-ten Z. mit λ
$Q_{ij} \cdot A$: Add der j-ten Z. zur i-te
$P_{(ij)} \cdot A$: Vert. der i-ten u. j-ten Z.

Mult mit el-Matrix $\in Gl_n(K)$ von re bewirkt entsprechende el. Spaltenumformungen.

Satz 4: Jede Matrix aus $Gl_n(K)$ lässt sich als Produkt von endl viele el-Matrizen schreiben.

Bew: Kap 1 §5 Lem 5
$\Rightarrow$ $A \in K^{n \times n}$ lässt sich durch endl viele el Zeilen u. Spalten-Umf auf die Form

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ bringen.

Bem 3
$\Rightarrow$ Es ex el-Matrizen $X_1, \dots, X_k$, $Y_1, \dots, Y_l$ s.d.

$$X_1 \cdots X_k \, A \, Y_1 \cdots Y_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $A \in Gl_n(K)$, so ist $r = n$
$\Rightarrow$ $A = X_k^{-1} \cdots X_1^{-1} \, Y_l^{-1} \cdots Y_1^{-1}$ $\square$.

Satz 5: Jedes $A \in GL_n(K)$ lässt sich durch ausschließlich Zeilenumf. in die Einheitsmatrix überführen.

Bem 6: Ist $A \in GL_n(K)$ und sind $X_1, \dots, X_k$ El-Matrizen mit

$$X_1 \cdot \ldots \cdot X_k A = I_n \quad , \text{ so gilt}$$

$$A^{-1} = X_1 \cdot \ldots \cdot X_k .$$

$\Rightarrow$ Verfahren zur Berechnung von A^{-1}.