Andernfalls heißt das m-Tupel linear unabhängig.

Lemma 2: Sei V ein K-VR. Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ und $w_1, \dots, w_s \in V$. Es gelte

i) $s > r$

ii) $w_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r) \quad \forall\, i = 1, \dots, s$.

Dann sind $w_1, \dots, w_s$ l.a.

Bew: Wie Kap I, §4 Lem 3. $\square$

Kor 3: Sei V endl erz K-VR.
Dann ex $d \in \mathbb{N}$, so daß je $d+1$ Vektoren in V l.a. sind.

Def: Eine Basis eines K-VR's V ist ein maximales System linear unabhängiger Vektoren.

Bem 4: Eine Basis $v_1, \dots, v_d$ von V ist Erzeugendensystem

Satz 5: (Basisergänzungssatz)
Sei V endl erz. K-VR. Jedes System lin unabh. Vektoren kann zu einer Basis ergänzt werden.

Bew: Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ l.u.
Falls $\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r) = V$, sind wir fertig.

Falls nicht, so ex $v_{r+1} \in V \setminus \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_r)$.
$\Rightarrow v_1, \ldots, v_{r+1}$ sind l. u.
Fahre so fort.
Wegen Kor 3 bricht dieses Verfahren mit Basis $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_d$ ab. ($d \geq r$). $\square$

Satz 6: Sei V endl. erz. Je zwei Basen von V sind gleich lang.

Bew: Folgt aus Kor 2 + Bem 4. $\square$

Def: Die <u>Dimension</u> von V ist die Länge einer Basis.

Satz 7: Seien $a_1, \ldots, a_m \in V$. Es sind äqu:

i) $a_1, \ldots, a_m$ ist max System von l. u. Vektoren (also Basis)

ii) $a_1, \ldots, a_m$ sind l. u. und erzeugen V.

iii) $a_1, \ldots, a_m$ ist min Erz.-System von V.

Bew: Wie Kap 1 §4 Satz 3. $\square$

Bem 8: ~~Aus~~ Sei V endl. erz. Aus jedem Erzeugendensystem von V kann eine Basis ausgewählt werden.

Bew: Übung.

Lem 9: Sei V endl erz. und $W \subset V$ Unter-VR. i) Dann ist W endl erz.

~~Bew: Übung~~

ii) Es gilt $\dim W \leq \dim V$

iii) Falls $\dim W = \dim V$, so ist $W = V$.

Bew: i) Ann W ist nicht endl erz. Dann gibt es $\forall d \in \mathbb{N}$ Vektoren $a_1, \dots, a_d \in W$, die lin unabh. sind.

~~Nach Satz 5~~ ~~kann man sie zu Basis von~~ ~~Vergänzen~~

Diese Vektoren sind auch als El von V l.u. Wid zu Kor 3 für V.

ii) folgt aus Satz 5.

iii) " " "

$\square$

Lem 10: Sei V bel K-VR (nicht notw. endl. Erzeugt.)

Sei $M \subset V$ Teilmenge. Sei $\mathrm{Lin}(M)$ die Menge aller endl Summen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \quad , \quad r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, a_i \in M.$$

„Lineare Hülle"

· $\mathrm{Lin}(M)$ ist Unter-VR von V

· $\mathrm{Lin}(M)$ heißt Erzeugendensystem, falls $\mathrm{Lin}(M) = V$.

· M heißt l.u. falls für jede

~~Eine Basis von V ist~~

endl. Summe $s=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$ (mit $\lambda_i \in K, a_i \in M$)
gilt: $s = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$.

· Man nennt M Basis von V, falls
M l.u. ist und
M Erz. System ist.

Man kann zeigen (Lemma von Zorn)
Jeder K-VR V besitzt eine Basis.
(die aus endl. vielen El. besteht g.d.w.
V endl. erz. ist).

Kapitel III Lineare Abbildungen

§1 Der Begriff der linearen Abbildung

Bsp: Sei K Körper, $A \in K^{m \times n}$.
Ist $x \in K^n$ $(\cong K^{n \times 1})$ Spaltenvektor, so
ist $y = Ax \in K^m$ " .

Wir erhalten eine Abbildung

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m , \quad x \mapsto f_A(x) = A \cdot x .$$

Die i-te Komponente von $y = Ax$ ist

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Da Matrizenmultiplikation dem Distributivgesetz genügt, gilt

- $f_A(x+y) = A \cdot (x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$,
- $f_A(\lambda x) = A \cdot (\lambda x) = \lambda (Ax) = \lambda f_A(x)$

$\forall x, y \in K^n, \lambda \in K$.

f_A ist ein Beispiel für eine lineare Abbildung. Allgemeiner:

Def: Seien V, W K-VR. Eine Abbildung
$f : V \to W$
heißt <u>linear</u>, falls gilt

i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$,

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in K, x \in V$.

· lineare Abb heißen auch Vektorraum-homomorphismen.

· Durch Induktion nach n folgt aus i, ii:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad (\lambda_i \in K, x_i \in V)$$

· Es gilt $f(0_V) = 0_W$.

Bsp: 1. $f_A : K^n \to K^m$ für $A \in K^{m \times n}$ wie oben.

2. Ist $U \subset V$ Untervektorraum, so ist die Inklusion

$$i : U \to V, \quad i(u) = u$$

linear.

3. Sei V K-VR und $a_1, \dots, a_n \in V$. Die Abb

$$\varphi : K^n \to V, \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

ist linear.

Bem 1: i) Sie ist surjektiv $\iff$ $a_1, \dots, a_n$ ist Erzeugendensystem von V

ii) Sie ist injektiv $\iff$ $a_1, \dots, a_n$ sind l.u.

Bew: Übung. — siehe §3 Satz 4

4. Eine lin Abb $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Form $x \mapsto ax$, ~~($a \in \mathbb{R}$ fest)~~

wobei $a = f(1)$.

Bem: Sind V, W, X K-VR und $f: V \to W$, $g: W \to X$ lin Abb, so ist $g \circ f$ linear.

Bew: Übung

Bem: Sei V endl erz K-VR und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V.
Dann läßt sich jedes $v \in V$ in eindeutiger Weise darstellen als

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{mit } \lambda_i = \lambda_i(v) \in K.$$

Bew: Daß es eine Darst gibt folgt aus der Tatsache, daß eine Basis Erzeugendensystem ist. Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \quad (\mu_i \in K)$$

eine zweite Darst.

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) b_i$$

$\overset{b_1, \dots, b_n \text{ l.u.}}{\Rightarrow}$

$$\lambda_i = \mu_i \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ Darst. ist eindeutig. $\square$

Folgerung:

Satz 4:

Seien V, W K-VR. Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und seien $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in W.
Dann gibt es genau eine lin. Abb.

$$f: V \to W$$

mit $f(b_i) = w_i \quad \forall \; i = 1, \dots, n$.

Bew: Wir definieren f durch

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$$

für $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V$.
Da $b_1, \dots, b_n$ Basis ist, ist f wohldef.
Die Abb ist linear.
Aufgrund von $f(b_i) = w_i \; \forall i = 1, \dots, n$ und der Linearität ~~von f~~ ist f eindeutig bestimmt. $\square$

§2 Kern und Bild

Def: Sei $f: V \to W$ eine lin Abb.
Dann def. man

$$\mathrm{Bild}(f) = f(V) = \{ f(x) \; ; \; x \in V \}$$

$$\mathrm{Kern}(f) = \{ x \in V \; ; \; f(x) = 0 \}.$$

Bem 1: $\mathrm{Bild}(f)$ ~~und Kern(f)~~ ist Untervektorraum von W, $\mathrm{Kern}(f)$ ist " " V.

Bew: Für Bild: (Kern: Übung)

- Seien $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \in \mathrm{Bild}(f)$, wobei $x_1, x_2 \in V$.
  Dann ist $$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) \overset{f \text{ lin}}{=} f(x_1 + x_2) \in \mathrm{Bild}(f).$$
- Sei $\lambda \in K$, $y = f(x) \in \mathrm{Bild}(f)$.
  Dann ist $$\lambda \cdot y = \lambda \cdot f(x) \overset{f \text{ lin}}{=} f(\lambda x) \in \mathrm{Bild}(f). \quad \square$$

Bem 2: Sei $f: V \to W$ lin Abb.
f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

Bew: „$\Rightarrow$" klar.
„$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

Seien $x_1, x_2 \in V$ mit $f(x_1) = f(x_2)$.

<u>ZZ:</u> $x_1 = x_2$.

Es gilt $f(x_1) - f(x_2) = 0$

$\overset{f \text{ lin}}{\Rightarrow} f(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Kern}(f)$

$\overset{\text{Ann}}{\Rightarrow} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. $\square$

<u>Satz 3:</u> (Dimensionsformel)

Seien V, W endl. dim K-VR und $f: V \to W$ lin Abb. Es gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

<u>Bew:</u> Sei $m = \dim(\text{Kern}(f))$ und $e_1, \dots, e_m$ Basis von $\text{Kern}(f)$.

Wir ergänzen dies zu einer Basis $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ von V, wobei $n = \dim(V) \geq m$.

Es gilt $\text{Lin}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Bild}(f)$.

Wegen $f(e_1) = \dots = f(e_m) = 0$ gilt sogar

$$\text{Lin}(f(e_{m+1}), \dots, f(e_n)) = \text{Bild}(f)$$

<u>Beh:</u> $f(e_{m+1}), \dots, f(e_n)$ sind l.u.