- Für $a \cdot b$ schreibt man häufig ab.
- Man vereinbart üblicherweise, daß die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Damit ist $(a \cdot b) + (a \cdot c) = ab + ac$.

Bem 1: Sei $(K, +, \cdot)$ Körper.

i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in K$

ii) Sind $a, b \in K$ und $a \cdot b = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

iii) $\forall a, b \in K$ gilt $a(-b) = (-a)(b) = -(ab)$.

iv) $(-a)(-b) = ab$

Bew: Übung.

Bsp: 1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

3. ~~$(\{0,1\}, +, \cdot)$, wobei~~

~~+~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~

~~·~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~

Sei $M = \{g, u\}$ eine 2-elementige Menge.
Definiere

+	g	u
g	g	u
u	u	g

·	g	u
g	g	g
u	g	u

Dann ist $(M, +, \cdot)$ Körper.

4.) $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper, wobei

$$(a,b)+(a',b') = (a+a', b+b')$$
$$(a,b)\cdot(a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$$

Das neutrale Element für „+" ist $(0,0)$, das Inverse von (a,b) ist $(-a,-b)$.

Das neutrale Element für „·" ist $(1,0)$.

Das Inverse von $(a,b)\neq(0,0)$ ist

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$\left[\ (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0)\right.$$

Dieser Körper heißt Körper der komplexen Zahlen. Er wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Die Abb $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $r\mapsto(r,0)$ ist inj. Es gilt

$$(r,0)+(r',0) = (r+r', 0)$$
$$(r,0)\cdot(r',0) = (rr', 0)$$

Daher können wir $\mathbb{R}$ mit dem Teilkörper $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(a,b)\in\mathbb{C};\ b=0\}$

identifizieren und $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen.

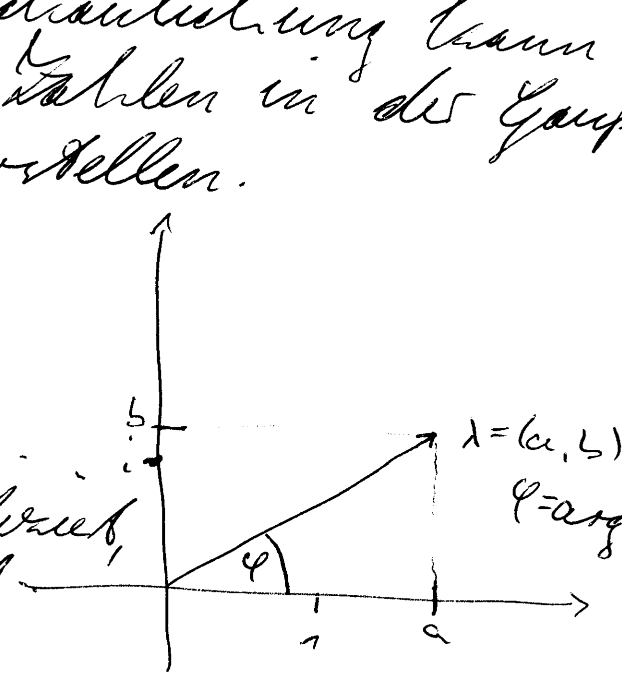
Bez.: $i := (0,1)$ heißt imaginäre Einheit.

- Es gilt $i^2 = -1$.
- Jedes $\lambda = (a,b) \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + bi$.
- $Re(\lambda) := a$ heißt <u>Realteil</u>
- $Im(\lambda) := b$ " <u>Imaginärteil</u> von λ.
- $\bar{\lambda} = a - bi = (a,-b)$ heißt zu λ <u>komplex konjugierte</u> Zahl.
- $|\lambda| = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}} = \sqrt{a^2+b^2}$ heißt Betrag von λ.

Bem: Damit gilt $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$

Zur geometrischen Veranschaulichung kann man die komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.

- Addition in $\mathbb{C}$: Vektoraddition.
- Multiplikation in $\mathbb{C}$: Beträge werden multipliziert, Argumente werden addiert.



§3 Gruppenhomomorphismen

... sind Abbildungen zwischen zwei Gruppen, die mit der Gruppenstruktur verträglich sind.

Analog werden später Körperhomomorphismen, Vektorraumhomomorphismen, ... betrachtet.

__Def:__ Seien $(G, \circ)$, $(H, \square)$ Gruppen. Ein __Gruppenhomomorphismus__ ist eine Abb $f: G \to H$, so daß

$$f(g \circ g') = f(g) \,\square\, f(g') \quad \forall g, g' \in G.$$

__Bsp:__
- $\exp: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $x \mapsto e^x$
- $\operatorname{sgn}: S_n \to \{\pm 1\}$, $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$
- Sei Z_2 die Gruppe $\{g, u\}$ mit

$\oplus$	g	u
g	g	u
u	u	g

$$\pi: (\mathbb{Z}, +) \to (Z_2, \oplus)$$
$$a \mapsto \begin{cases} g, & \text{falls } a \text{ gerade} \\ u, & \text{falls } a \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist Gruppenhom.

__Bem 1:__ Ein Gruppenhom $f: G \to H$ bildet das neutrale Element e von G auf das neutrale Element e' von H ab.

__Bew:__ $f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e) \Rightarrow e' = f(e)$ □

<u>Def</u>: Seien G, H Gruppen. Ein Gruppenisomorphismus ist ein Homomorphismus, der bijektiv ist.

<u>Bsp</u>: $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist Isom.

Isomorphe Gruppen sind von der Struktur als gleich anzusehen.

<u>Def</u>: Eine Teilmenge $H \subset G$ einer Gruppe G heißt Untergruppe, falls
$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H \text{ und } ab^{-1} \in H$$
$\forall a, b \in H$.

<u>Klar</u>: • $e \in H$
• H ist Gruppe.
[• Die Inklusion $i : H \to G$, $i(h) = h$ ist Gruppenhom.]

<u>Bsp</u>: • $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$
• Die Menge der geraden Zahlen $\subset (\mathbb{Z}, +)$.

§5 Vektorräume

Erinnerung: Für $\mathbb{R}^n$ gibt es die Verknüpfungen

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Vektoraddition

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Multiplikation mit Skalar.

Wir haben in Kap I lineare Teilräume $W \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet.

Wir wollen dies verallgemeinern.

<u>Def</u>: Sei K Körper. Ein <u>Vektorraum</u> über K ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad ; \quad (a,b) \mapsto a+b$$
$$\cdot : K \times V \longrightarrow V \quad ; \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda a$$

so daß:

<u>V1</u> $(V,+)$ ist abelsche Gruppe

<u>V2</u> Für die Mult. mit Skalaren gilt:

a) $(\lambda+\mu)\cdot a = \lambda\cdot a + \mu\cdot a$

b) $\lambda\cdot(a+b) = \lambda\cdot a + \lambda\cdot b$

c) $(\lambda\mu)\cdot a = \lambda\cdot(\mu\cdot a)$

d) $1\cdot a = a$

· Das neutr. El von $(V,+)$ heißt Nullvektor. Bez: 0, 0_V

Bsp: 1. $K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \; ; \; x_i \in K\}$

= Menge der n-Tupel von Zahlen aus K

ist K-VR. ($K^0 = \{\text{leeres Tupel}\} = \{0\}$)

2. $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR

3. Sei X Menge und K Körper.

Sei Abb(X, K) = Menge aller Abbildungen

$f: X \to K$. (Andere Schreibweise: $K^X = \text{Abb}(X,K)$)

Ist K-VR mit Addition

$f+g: X \to K, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

und Skalarmult

$\lambda \cdot f: X \to K, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

für $\lambda \in K$, $f \in \text{Abb}(X,K)$.

Das neutr El ist die Nullabb.

$0: X \to K, \quad x \mapsto 0 \quad \forall x \in X$

4. Lineare Teilräume $\subset \mathbb{R}^n$ sind $\mathbb{R}$-VR.

5. Def: Sei V ein K-VR. Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt linearer Teilraum falls $W \neq \emptyset$ und falls gilt

$a, b \in W \Rightarrow a + b \in W$

$\lambda \in K, a \in W \Rightarrow \lambda \cdot a \in W$.

Solch ein W ist ein K-VR.

Man nennt W auch Untervektorraum von V.

6. Beispiele aus der Analysis:

- Vektorraum der Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(= \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$
- " " stetigen " "
- " " diffbaren "

<u>Bem 1</u>: Sei V ein K-VR und $a_1, \ldots, a_m \in V$.
Dann ist $\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_m) = \{ K a_1 + \ldots + K a_m$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \; ; \; \lambda_i \in K \right\}$$
ein Unter-VR von V.

<u>Def</u>: Ein K-VR V heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es $a_1, \ldots, a_m \in V$ gibt, so daß
$$V = \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_m).$$
Dann heißt $a_1, \ldots, a_m$ <u>Erzeugendensystem</u> von V.

<u>Bsp</u>:
- K^n ist endl erz.
- VR der stetigen Fu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht.

<u>Def</u>: Ein m-Tupel von Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ eines K-VR's V heißt <u>linear abh</u>, falls es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ gibt, so daß
- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$
- $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$