$v_1, \ldots, v_{r+1}$ lin. unabh.
Induktion $\Rightarrow$ finde $v_1, \ldots, v_{n+1} \in W \subset \mathbb{R}^n$ l.u.
$\lightning$ zu Folg 4.

Seien nun $v_1, \ldots, v_r$ und $w_1, \ldots, w_s$
zwei Basen von W.
Ang $r \neq s$.
OBdA $s > r$
$\xRightarrow{\text{Lem 3}}$ $\exists$ $1 \leq i \leq s$: $w_i \notin \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_r)$
$\xRightarrow{v_1, \ldots, v_r \text{ l.u.}}$ $w_i, v_1, \ldots, v_r$ sind l.u.
im Widerspruch zur Maximalität von $v_1, \ldots, v_r$. $\square$

<u>Def</u>: Unter der <u>Dimension</u> eines lin. Teilraumes $W \subset \mathbb{R}^n$ versteht man die Länge einer Basis von W.

<u>Lem 7</u>: Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ l.u. Dann bilden diese Vektoren eine Basis von

$$\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_m).$$

<u>Bew</u>: Übung

<u>Def</u>: Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ lin Teilraum. Ein m-Tupel ~~$a_1, \ldots, a_m \in W$~~ $a_1, \ldots, a_m$ ~~$\in W$~~ von Vektoren aus W heißt <u>Erzeugendensystem</u> von W, falls

$$W = \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_m).$$

<u>Bem 8</u>: Jede Basis von W ist Erzeugendensystem von W.

<u>Bew</u>: ~~Sei~~ Sei $a_1, \dots, a_m$ Basis von W.

Ang $\mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_m) \subsetneq W$.

Sei $v \in W \setminus \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_m)$.

Dann ist $v, a_1, \dots, a_m$ l.u.

$\lightning$ zur Maximalität von $a_1, \dots, a_m$. $\square$

<u>Satz 9</u>: Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum und $a_1, \dots, a_m \in W$. Es sind äqu:

i) $a_1, \dots, a_m$ ist max System von l.u. Vektoren in W (also Basis)

ii) $a_1, \dots, a_m$ ist minimales Erzeugendensystem.

iii) $a_1, \dots, a_m$ ist l.u. und Erzeugendensystem

<u>Bew</u>: <u>$i \Rightarrow ii$</u>: Bem 8 $\Rightarrow$ $a_1, \dots, a_m$ ist min. Erzeugendensystem. Minimalität ist klar.

<u>$ii \Rightarrow i$</u>: Übung (Damit ist $(i) \Leftrightarrow (iii)$ auch klar)

- $a_1, \dots, a_m$ l.u.:
Ang. nicht. $\overset{\text{Bem 7}}{\Rightarrow}$ OBdA $a_m \in \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_{m-1})$.
$\Rightarrow \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_{m-1}) = W$, $\lightning$ zu Minimalität des Erzeugendensystems $a_1, \dots, a_m$.
- $a_1, \dots, a_m$ ist <u>maximales</u> System von l.u. Vektoren: Ang. nicht.
$\Rightarrow \exists\, a_{m+1} \in W$ s.d. $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}$ l.u.
$\lightning$ zu $a_{m+1} \in \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_m)$. $\square$

§5 Der Rang einer Matrix

Def: Der Zeilenrang einer Matrix A ist die maximal mögliche Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A.
Analog: Der Spaltenrang von A.

Bem 1: Der Zeilenrang von A ist die Dimension des von den Zeilen von A aufgespannten linearen Teilraums von A.
Analog für Spaltenrang.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Zeilenrang $=2$, Spaltenrang $=2$.

Satz 2 Für jede Matrix A gilt
Zeilenrang = Spaltenrang.

Bew: Benutze 3 Lemmas:

Lemma 3:
Elementare Zeilenumformungen (vom Typ i-iv) ändern den Zeilenrang und Spaltenrang von A nicht.

Bew: Der von den Zeilen aufgespannte lin. TR ändert sich nicht $\Rightarrow$ Zeilenrang ändert sich nicht.

Für Spaltenrang: Übung. $\square$

Lemma 4:
Elementare Spaltenumformungen (vom Typ i-iv) ändern den Spalten- und Zeilenrang von A nicht.

Bew: Wie Lem. 3. $\square$

Lemma 5:
Jede $m \times n$-Matrix lässt sich durch el. Zeilen- und Spaltenumformungen in die Form

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

überführen.

Bew: Durch Zeilenumf. vom Typ i-iii und Spaltenvertauschungen erreiche wir Normalform

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{rr} \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0$

- Addiere Vielfaches der 1. Spalte zu anderen Spalten
  $\longrightarrow$ Erhalte 1. Zeile $(a_{11}\ 0 \cdots 0)$.
- Addiere Vielfaches der 2. Spalte zu anderen Spalten

$\rightsquigarrow$ Erhalte r Zeilen ($a_{rr} \neq 0 \ldots$)

erhalte Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & a_{rr} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right), \quad a_{ii} \neq 0, \; i = 1, \ldots, r.$$

Multipliziere i-te Zeile mit $\frac{1}{a_{ii}}$, $i = 1, \ldots, r$

$\rightsquigarrow$ Erhalte

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Bew. von Satz 2:

Lemma 3–6 $\Rightarrow$ Genügt die Beh. zu zeigen für den Fall:

$$A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dafür ist offenbar Zeilenrang $= r =$ Spaltenrang $\square$.

Bem. 6: Der Rang einer Matrix in Normalform ($\rightsquigarrow$ § 2) ist gleich der dort auftretenden Zahl r.

Damit können wir unsere Ergebnisse zur Lösungsmenge des LGS

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (*)$$

wie folgt zusammenfassen. Sei

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz 7:
Das LGS (*) hat genau dann mindestens eine Lsg, wenn

$$\text{Rang}(G) = \text{Rang}(A).$$

Die Lösungsmenge des zug. hom. LGS ist ein lin. TR des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-r$.
Die Lösungsmenge des inhomogenen Systems ist ein aff. Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dieser ist entweder leer oder ein Translat des Lösungsraums des hom. Systems.

§6 Matrixmultiplikation

Sei $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge der $m\times n$-Matrizen.

Zunächst: sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Einträgen a_{ij}, bzw. b_{ij} so def. man die Summe

$$C = A + B \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

durch $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar, so def. man

$$\lambda \cdot A \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

als die Matrix mit den Einträgen

$$\lambda \cdot a_{ij}.$$

Bem 1: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda+\mu) A = \lambda A + \mu A$$

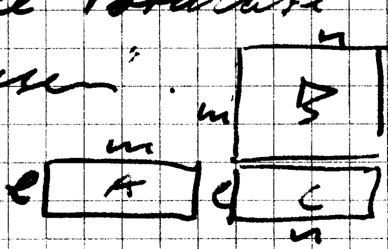
$$(\lambda\mu) A = \lambda(\mu A).$$

Matrizenmultiplikation ordnet einer $l\times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ und einer $m\times n$-Matrix $B = (b_{jk})$ eine $l\times n$- " $C = (c_{ik})$ zu durch

$$C = A \cdot B$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \qquad \begin{aligned} i &= 1, \dots, l \\ k &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Wichtig: Die Formate von A u. B müssen „passen":



Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• Nicht kommutativ!

Bem 2: Für $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ gilt das Assoziativgesetz

$$A(BC) = (AB)C$$

Bew: Übung.

Bem 3: Für $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ gilt das Distributivgesetz:

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)D = BD + CD.$$

Bew: Übung

Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (*)$$

lassen sich elegant mit Hilfe des Matrixprodukts elegant schreiben.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die sog. Koeff-matrix.

Fasse $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ als Spaltenvektor auf.

Fasse $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ " " " .

Damit ist (*) äquivalent zu

$$A x = b .$$