Das Gauß-Verfahren

Bem 4: Durch Kombination von i, ii kann man folgende Umformung durchführen:

iv) Addition des r-fachen der i-ten Zeile zur k-ten Zeile ($r \neq 0$, $1 \leq i,k \leq m$)

Denn: 1. Mult. die i-te Zeile mit r
2. Addiere die (neue) i-te Zeile zur k-ten
3. Mult die (neue) i-te Zeile mit r^{-1} $\square$

Bew von Satz 3:

Sei A $m \times n$ Matrix, $A = (a_{ij})$.

- OBdA $A \neq O_{m,n}$ (sonst bereits fertig).
- Spaltenvertauschung $\Rightarrow$ 1. Spalte $\neq O_{m,1}$.
- Zeilenvert. $\Rightarrow$ 1. Zeile der 1. Spalte $\neq 0$.

$\Rightarrow$ OBdA $a_{11} \neq 0$.

- Falls $m = 1$, so ist A damit in Normalform.
- Falls $m > 1$:

Addiere für $i = 2, \ldots, m$ zur i-ten Zeile das $-a_{i1}/a_{11}$-fache der ersten Zeile

$\Rightarrow$ erhalte neue Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

wobei B eine $(m-1)\times(n-1)$ - Matrix ist.
„$*$" steht für Einträge die wir nicht weiter spezifizieren.

- Ab jetzt führen wir nur noch el. Zeilenumformungen mit den Zeilen $Z_2, \dots, m$ und Spaltenvert. der Spalten $Z_2, \dots, n$ durch.

  Damit bleibt die erste Spalte $\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ unverändert und wir können bel. el. Zeilenumf. u. Spaltenvert. für die Matrix B vornehmen.

- Analog zum obigen Argument können wir damit die Matrix A auf die Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & * \\ \hline 0 & a_{22} & * \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right)$$

  bringen, wobei $a_{22} \neq 0$ und C $(m-2)\times(n-2)$ - Matrix.

- Setze das Verf. fort.
- Erhalten nach endl. vielen Schritten eine Matrix in Normalform. $\square$

<u>Frage</u>: Was ist die Bedeutung von r in der Normalform? Hängt sie von der Wahlen (bei Spalten bzw Zeilen vert.) im Gaußalgorithmus ab?

Bsp:

Betr. das LGS

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 1$$

innere
Koeff - Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Koeff Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \qquad \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$$
$$-x_2 - 2x_3 = -1 \qquad x_2 = 0$$
$$4x_3 = 2 \qquad x_1 = -\frac{1}{2}$$

§3 Die Struktur der Lösungsmenge

Bsp: Für $(a,b) \neq (0,0)$ ist die Lösungsmenge der Gl $ax + by = c$ eine Gerade in der „(x,y)-Ebene".

Verallgemeinere und präzisiere dies.

Def: • $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) ; \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n\}$

= „Menge der n-Tupel reeller Zahlen".

n-Tupel reeller Zahlen ist Abb

$$x : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i \mapsto x(i)$$

Ist eind. bestimmt durch Angabe der Werte $x_i := x(i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Schreibe $x = (x_1, \dots, x_n)$

„n-Tupel = Zeilenvektor der Länge n"

• Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ heißen auch <u>Vektoren</u>.

• Summe von Vektoren

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

• Produkt von $C \in \mathbb{R}$ mit Vektor:

$$C \cdot (x_1, \dots, x_n) := (Cx_1, \dots, Cx_n)$$

Def: Ein lin Gl.-Syst.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

heißt homogen, falls $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.
Andernfalls heißt es inhomogen.

Bem 1:

i) Homogene Systeme sind lösbar.
Sie haben stets die „triviale Lösung" $x = (0, \ldots, 0)$

ii) Ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$ Lsg eines hom Gl-Systems, so auch $c \cdot x$ $\forall c \in \mathbb{R}$.

iii) Sind x, y Lsg eines hom Systems, so auch $x + y$.

Def: Eine Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ heißt linearer Teilraum, falls

- $0 \in W$
- $a, b \in W \Rightarrow a + b \in W$
- $c \in \mathbb{R}, a \in W \Rightarrow ca \in W$

Bem 2: Die Lösungsmenge eines homogenen lin. Gl.-Syst. mit m Gl., n Var ist ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

<u>Satz 3</u>: Ein hom LGS mit m Gl und n Var und $m<n$ besitzt stets eine nichttriviale Lsg.

<u>Bew</u>: Dies folgt aus §2. □

§2, Satz [illegible] $\Rightarrow$ OBdA ist das LGS in Normalform. §2 Bem 1 $\Rightarrow$ $\exists$ Lsg mit $x_n \neq 0$.

Die Lösungsmenge eines inhom. LGS ist kein lin. Teilraum, denn 0 ist keine Lsg.

<u>Def</u>: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Teilmenge und $a \in \mathbb{R}^n$. Das <u>Translat</u> von M um a ist def. als

$$a+M := \{a+x;\ x \in M\}.$$

<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>affiner Teilraum</u>, falls $A=\emptyset$ oder A das Translat eines lin. Teilraums $W \subset \mathbb{R}^n$ um einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$,

$$A = a+W.$$

<u>Bem 4</u>: Ist $A = a+W \subset \mathbb{R}^n$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^n$ lin. Teilraum, $(\Rightarrow A \neq \emptyset)$ so gilt:

i) $a \in W$ (da $0 \in W$)

ii) Ist $b \in A$, so gilt $A = b + W$

iii) $W = \{a - b \;;\; a \in A,\ b \in A\}$

iv) A ist ein Teilraum, falls $0 \in A$.

<u>Satz 5:</u> Sei

$$(*) \qquad \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

ein bel. LGS (homogen oder inhomogen).
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge des <u>zugehörigen homogenen Systems</u>

$$(**) \qquad \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix}$$

Falls $(*)$ eine Lsg $u \in \mathbb{R}^n$ besitzt, so ist die Lösungsmenge M von $(*)$ gegeben durch

$$M = u + W.$$

Insbesondere ist die Lösungsmenge von $(*)$ ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

<u>Bew:</u> <u>$M \supset u + W$</u>: Sei $x \in W$, also x Lsg von $(**)$. $\Rightarrow$ $u + x$ ist Lsg von $(*)$.

$M \subset u+W$:

Sei $v \in M$.

$\overset{u \in M}{\Rightarrow}$ $v-u \in W$

$\Rightarrow$ $v = u + (v-u) \in u+W$. □

§4 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Def: Ein m-Tupel von Vektoren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ heißt linear abhängig, falls es $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

- $(c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0)$
- $c_1 a_1 + \dots + c_m a_m = 0 \in \mathbb{R}^n$

(d.h. 0 läßt sich nicht-trivial linear kombinieren.)

Falls das m-Tupel nicht l.a. ist, so heißt es linear unabhängig.

Achtung: Hier sind a_i nicht die Komponenten eines Vektors, sondern selbst Vektoren $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

Bsp: • $(1,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$ sind l.u.

• $(1,0), (1,1), (0,1) \in \mathbb{R}^2$ sind l.a., denn $(1,0) - (1,1) + (0,1) = 0$.

• Sei $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ $(i=1,\dots,n)$

Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so gilt

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Insbesondere sind $e_1, \dots, e_n$ linear unabhängig.

Bem 1: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ sind l.a. falls es einen unter ihnen gibt, etwa a_i, der sich aus den übrigen linear kombinieren läßt, d.h.

$$a_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \lambda_j a_j \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ geeignet.}$$

Bew: Übung.

Bem 2: Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ l.u. Dann gilt
i) $a_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, m$
ii) $a_i \neq a_j \quad \forall\, i \neq j$.

Def: Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Das lineare Erzeugnis von $a_1, \dots, a_m$ ist die Menge aller Linearkombinationen

$$\mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \;;\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}a_1 + \dots + \mathbb{R}a_m$$

Dies ist ein linearer Teilraum $\subset \mathbb{R}^n$.

Bsp: $\mathrm{Lin}((1,1)) \subset \mathbb{R}^2$ ist die Diagonale in der Ebene
$\mathrm{Lin}((1,0,0), (0,1,0)) \subset \mathbb{R}^3$ (x,y)-Ebene im $\mathbb{R}^3$.

<u>Lemma 3</u>: Seien $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ und $w_1, \dots, w_s \in \mathbb{R}^n$.

Es gelte i) $s > r$

ii) $w_i \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r)$

Dann sind $w_1, \dots, w_s$ l.a.

<u>Bew</u>: Wegen ii) ex $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$)

$$w_1 = a_{11} v_1 + \dots + a_{r1} v_r$$
$$w_2 = a_{12} v_1 + \dots + a_{r2} v_r$$
$$\vdots$$
$$w_s = a_{1s} v_1 + \dots + a_{rs} v_r$$

Nach §3 Satz 3 hat das hom LGS

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1s}\lambda_s = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{r1}\lambda_1 + \dots + a_{rs}\lambda_s = 0$$

eine <u>nicht-triviale</u> Lsg $(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$.
Denn $s > r$.
Nun gilt

~~$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_s f_s =$~~

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_s w_s = \lambda_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{r1} v_r) + \lambda_2 (a_{12} v_1 + \dots + a_{r2} v_r) + \dots + \lambda_s (a_{1s} v_1 + \dots + a_{rs} v_r)$$

$$= v_1 (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1s}\lambda_s) + \dots + v_r (a_{r1}\lambda_1 + a_{r2}\lambda_2 + \dots + a_{rs}\lambda_s) = 0. \ \square$$

Folgerung 4: Je $n+1$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind l.a.

Bew: Nach dem 7. Bsp oben ist

$\mathbb{R}^n = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$.

$\Rightarrow$ Lemma 3 impliziert die Aussage. $\square$

Def: Eine Basis eines linearen Teilraums $W \subset \mathbb{R}^n$ ist ein maximales (d.h. nicht mehr vergrößerbares) System linear unabh. Vektoren aus W.

Bsp: Folg 4 $\Rightarrow$ $e_1, \ldots, e_n$ bilden Basis des $\mathbb{R}^n$. Die „kanonische Basis" des $\mathbb{R}^n$.

Bem 5: Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ lin. Teilraum und $v_1, \ldots, v_r$ Basis von W. Dann ist $r \leq n$.

Bew: Dies folgt aus Folg 4.

Satz 6: Jeder lin. Teilraum $W \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis. Je zwei Basen von W sind gleich lang.

Bew: Angenommen W besitzt keine Basis. Dann gibt es zu einem bel System $v_1, \ldots, v_r$ lin. unabh. Vektoren aus W stets ein $v_{r+1} \in W$, so daß