# Kap 1: Lineare Gleichungen und Matrizen

Vorausgesetzt:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ nat Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$ rat Zahlen

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen

In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ hat man $+, -, \cdot, :$ .

[Sind „Körper". Dies wird in Kap 2 präzisiert. Alles was wir im folgenden über Lin. Gl. in $\mathbb{R}$ sagen gilt analog für beliebige Körper.]

## §1 Eine Gleichung, eine Variable

Die einfachste lin. Gl. ist

$$(*) \qquad ax = b$$

Dabei sind $a, b$ gegebene (reelle) Zahlen.

Wir suchen nach Lösungen der Gl., d.h. wir suchen nach (reellen) Zahlen $x$ für welche $(*)$ gilt.

Bsp: $\quad 2x = 3$

Hier gibt es genau eine Lsg für $x$, nämlich $x = 3/2$.

Allgemein hat man versch. Fälle zu unterscheiden.

1. $a \neq 0$. Hier ist $x = b/a$ die einzige Lsg von $ax = b$.

2. $a = 0$. Zwei Unterfälle:

2.1. $b = 0$. Jede Zahl $x$ löst $(x)$.

2.2. $b \neq 0$. Keine " " " ".

Präziser kann man dies formulieren, indem man die Lösungsmenge

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ ax = b\}$$

angibt.

1. $M = \{b/a\}$.

2.1 $M = \mathbb{R}$

2.2 $M = \emptyset$. (leere Menge).

## §2 m Gleichungen, n Unbekannte

Ein lin. Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (*) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten $a_{ij}$ und die $b_i$ vorgegeben, und wir suchen nach Lösungen $x_1, \dots, x_n$, für die (*) richtig ist.

Bsp
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

Hier ist $m=2$ u. $n=3$.

Um Schreibarbeit zu sparen gibt man häufig nur die <u>Koeffizientenmatrix</u> an:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Manchmal betr. man auch nur die <u>engere Koeffizientenmatrix</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Unter einer <u>Matrix</u> versteht man ein rechteckiges Schema von Zahlen.
Hat man $m$ Zeilen und $n$ Spalten, so spricht man auch von einer <u>$m \times n$-Matrix</u>.

Spezielle Matrizen:

$m = 1$ : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ „Zeilenvektor"

$n = 1$ : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ „Spaltenvektor"

Eine $m \times n$ - Matrix besteht aus $n$ Spaltenvektoren der Länge $m$, bzw. aus $m$ Zeilenvektoren der Länge $n$.

Weitere spezielle Typen von Matrizen:

Quadratische Matrizen: hier ist $m = n$

~~Diagonalmatrizen: Dies sind quadratische Matrizen~~

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für die alle Koeff $a_{ij}$ mit $i \neq j$ verschwinden.

Obere Dreiecksmatrizen: A wie oben

Also $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $n \times n$ Matrix.

Obere Dreiecksmatrizen:

A ist $n \times n$ Matrix und es gilt

$a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

Diagonalmatrizen:
A ist $n \times n$ Matrix und es gilt

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist ob. Dreiecksmatrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist Diagonalmatrix.

---

Def: Eine $m \times n$ Matrix A heißt Normalformmatrix, falls sie von der Form

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \quad (**)$$

ist, wobei $0 \leq r \leq \min(m,n)$
$a_{ii} \neq 0$ für $1 \leq i \leq r$.

Falls $r = 0$, ist A die Nullmatrix.
Falls $r = m$, so hat jede Zeile mind. 1 von 0 versch. Eintrag, nämlich $a_{ii}$.

Schreibt man $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$

mit $A_1$ $r \times r$
$A_2$ $r \times (n-r)$
$A_3$ $(m-r) \times r$, $A_4$ $(m-r) \times (n-r)$

so lauten die Bedingungen:

i) $A_1$ ist obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\neq 0$

ii) $A_3$ und $A_4$ sind Nullmatrizen (d.h. alle Einträge sind $= 0$)

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (m = 3,\ n = 3,\ r = 2)$$

Wir betrachten nun wieder das lin. Gl.-System (*).

Annahme: Die erweiterte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

habe Normalform wie in (**) mit $0 \leq r \leq \min(m,n)$

Die $(r+1)$-te bis $m$-te Zeile von (*) lautet dann

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

$\Rightarrow$ Falls einer der $b_i$, $i = r+1, \ldots, m$, ungleich 0 ist, so hat (*) keine Lsg.

Ang $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$.

Dann ist $(*)$ äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{rr}x_r + \ldots a_{rn}x_n &= b_r
\end{aligned}
\qquad (*')
$$

mit $a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, r$ (und $r \leq n$).

In diesem Fall existieren Lsg, und man findet alle Lsg wie folgt:

- gebe $x_{r+1}, \ldots, x_n$ willkürlich vor
- berechne $x_r$ mit der $r$-ten Gl:

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}}\left(b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{r,n}x_n\right)$$

- berechne $x_{r-1}$ mit der $(r-1)$-ten Gl

$$x_{r-1} = \frac{1}{a_{r-1,r-1}}\left(b_{r-1} - a_{r-1,r}x_r - \ldots - a_{r-1,n}x_n\right)$$

$\vdots$

- berechne $x_1$ mit der 1.-ten Gl.

Also:

Bem 1: Wenn die engere Matrix des lin Gl-Systems (*) Normalform hat, so existieren Lg genau dann wenn

$$b_{r+1} = \ldots = b_m = 0.$$

In diesem Fall erhält man alle Lg, indem man $x_{r+1}, \ldots, x_n$ frei vorgibt, und damit $x_r, \ldots, x_1$ wie oben berechnet.

Beobachtung: Die Lösungsmenge hat dann $n-r$ „freie Parameter" (nämlich $x_{r+1}, \ldots, x_n$). Durch diese sind die übrigen Variablen $x_1, \ldots, x_r$ eindeutig bestimmt.

Diese Beobachtung werden wir präzisieren.

Zunächst zeigen wir jedoch, daß man zu jedem lin. Gl.-Syst. (*) ein äquivalentes System in Normalform finden kann (das man dann wie oben lösen kann).

<u>Idee</u>: Gewisse Umformungen ändern die Lösungsmenge eines lin. Gl.-Sys. nicht.

<u>Bsp</u>:
$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$
Koeff.-Matrix: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Ist äqu. zu

- $$\begin{cases} ax+by=c \\ (a+d)x+(b+e)y=c+f \end{cases}$$
  Addition einer Gl. zu einer anderen
- $$\begin{cases} rax+rby=rc \\ dx+ey=f \end{cases}$$
  $(r\neq 0)$ Mult. einer Gl. mit einer von Null versch. Zahl
- $$\begin{cases} dx+ey=f \\ ax+by=c \end{cases}$$
  Vertauschen von Gl.

(*) >

Eine analoge Aussage gilt für $m\times n$ Systeme.

<u>Vereinbarung</u>:

Summe von Zeilenvektoren:
$$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n):=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$
Produkt einer Zahl $c$ mit Zeilenvektor:
$$c\cdot(a_1,\dots,a_n):=(ca_1,\dots,ca_n)$$

---

(*) Für die Koeff.-Matrizen:

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} ra & rb & rc \\ d & e & f \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$

Nun allg. für $m \times n$ Systeme



Def: Elementare Zeilenumformungen einer Matrix sind:

i) Addition einer Zeile zu einer anderen

ii) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$.

iii) Vertauschung zweier Zeilen

Elementare Spaltenumformungen sind analog def.

Bem. 2: Formt man ein lin. Gl-Syst. durch el. Zeilenumf. i) - iii) um, so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

Achtung: · El. Spalten-Umf ändern die Lösungsmenge

· Für Spaltenvertauschungen (iii) ist dies lediglich eine Vertauschung der Var.
z. B.: Vertauschung von 1. und 4. Spalte bedeutet: vertausche Lsg $x_1$ u. $x_4$.

Satz 3: Jede $m \times n$ Matrix läßt sich durch endl. viele El. Zeilenumf. (i-iii) und Spaltenvertauschungen in Normalform bringen.

Bew: Benutze das Gauß-Verfahren.