# Klausur „Einführung in die Optimierung“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Dr. Nicole Megow**

**WS 2011/2012**
**21.02.2012**

Tragen Sie in die nachstehenden Zeilen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Name: ................................................ | Matr. Nr.: ................................................

Vorname: ................................................ | Studiengang: ................................................

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 6 | 10 | 10 | 14 | 8 | 8 | 56 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

Hinweise:

a) Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.

b) Als Hilfsmittel zur Klausur ist ein DIN A4-Blatt mit handschriftlichen Notizen (doppelseitig) zugelassen.

c) Zum Bestehen der Klausur werden 50% der Punkte benötigt.

d) Mobiltelefone sind auszuschalten und in der Tasche zu verstauen.

e) Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zusammen mit einem Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

f) **Viel Erfolg!**

## 1. Aufgabe (6 Punkte)

Eine Gärtnerei kann von einem Nachbargrundstück bis zu 5 ha Land erwerben. Das Land kann zum Teil als Freiland, aber auch mit Folie überdacht bewirtschaftet werden. Der Anteil der überdachten Fläche an der Gesamtfläche soll ein Drittel nicht überschreiten. Für die Bewirtschaftung stehen insgesamt maximal 420 Arbeitstage pro Jahr zur Verfügung; 1 ha Freiland erfordert 40 Arbeitstage im Jahr, 1 ha überdachtes Land dagegen 240 Arbeitstage jährlich. An Kosten entstehen für 1 ha Freiland pro Jahr 800 €, für 1 ha überdachtes Land fallen pro Jahr 2.400 € an. Die Gesamtkosten dürfen das Budget von insgesamt 4.800 € im Jahr nicht überschreiten. Der voraussichtliche jährliche Reingewinn pro ha überdachtes Land ist doppelt so hoch wie für die gleiche Freilandfläche. Die Gärtnerei möchte den jährlichen Gewinn unter den genannten Bedingungen maximieren.

Stellen Sie ein lineares Programm für das Optimierungsproblem auf.

## 2. Aufgabe (10 Punkte)

Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{lllllllll}
(P) & \min & 5x_1 & + & 12x_2 & + & 2x_3 & & \\
 & \text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & \leq & 1 \\
 & & -8x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \geq & 0 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\
 & & & & & & x_1, x_3 & \geq & 0\,.
\end{array}
$$

Das Optimum liegt bei $x^* = (0, \frac{1}{2}, 2)^T$.

(a) Dualisieren Sie (P). Bringen Sie das duale Problem in eine Form, bei der alle Variablen nicht-negativ oder unbeschränkt sind.

(b) Finden Sie die Lösung des dualen Problems mit Hilfe der Lösung des primalen Problems. Geben Sie Ihre Rechenschritte an und argumentieren Sie, dass Sie die Optimallösung gefunden haben.

## 3. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sind das folgende lineare Problem $(P)$ und das dazugehörige duale Problem $(D)$:

$$
\begin{array}{lllll}
(P) & \min & c^T x & & \\
 & \text{s.t.} & Ax & = & b \\
 & & x & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
(D) & \max & b^T y & & & & \\
 & \text{s.t.} & A^T y & + & s & = & c \\
 & & & & s & \geq & 0\,.
\end{array}
$$

Nehmen Sie an dass $c \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $(D)$ immer eine zulässige Lösung hat. Geben Sie eine untere Schranke an die Optimallösung von $(D)$ an.

(b) Beweisen Sie folgenden Satz: Für beliebige zulässige Lösungen $\bar{x}$ für $(P)$ und $(\bar{y}, \bar{s})$ für $(D)$ gilt

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}\,.$$

(c) Angenommen es existiert kein zulässiger Punkt $z$ für das System

$$
\begin{aligned}
b^T z &> 0 \\
A^T z &\leq 0\,.
\end{aligned}
$$

Was impliziert dies für die Lösbarkeit bzw. die Optimallösungen von $(P)$ und $(D)$?

## 4. Aufgabe (14 Punkte)

Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
(P) & \min & -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
& \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 8 \\
& & x_1 & + & x_2 & & & \geq & 4 \\
& & & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Lösen Sie (P) mit dem primalen Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus.

**Hinweis:** Mit Blands Auswahlregel können alle Simplex-Schritte mit ganzen Zahlen durchgeführt werden.

(b) Wie ändert sich die Lösung, wenn die Zeile $x_1 + x_2 \geq 4$ durch die Zeile $2x_1 + 2x_2 \geq 10$ ersetzt wird? Begründen Sie mit Hilfe Ihrer Lösung zu (a).

## 5. Aufgabe (8 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{lllrcrcrl}
(NLP) & \min & f(x) = & -x_1^2 & - & x_1 \cdot x_2 & - & 10x_2 & \\
& \text{s.t.} & & 2x_1 & & & \leq & 13 & \\
& & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 &
\end{array}
$$

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Multiplikatoren an der Stelle $\bar{x} = (5, -1)^T$. Geben Sie Ihre Rechenschritte an.

(b) Kann $\bar{x}$ ein lokales Minimum sein? Begründen Sie.

## 6. Aufgabe (8 Punkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Mehrere Lösungen können richtig sein.

(a) Die konvexe Hülle einer Menge $M \subseteq \mathbf{R}^n$ ist

☐ eine konvexe Teilmenge von $M$
☐ der Schnitt aller Teilmengen, die $M$ enthalten
☐ die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten in $M$.

(b) Für welche der folgenden Klassen von Problemen gilt: wenn ein lokales Minimum exisitiert, so ist es gleichzeitig globales Minimum.

☐ $\min\{c^T x + \alpha \,|\, Ax \geq b\}$ für $\alpha \in \mathbf{Z},\ \alpha < 0$
☐ $\min\{x^T Q x \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$ mit $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symmetrisch
☐ $\min\{\max\{f_1(x), f_2(x)\} \,|\, \|x\|_2 \leq 1\}$ mit $f_1, f_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ konvex.

(c) Sei $x \in P(A, b) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$. Sei $x$ eine Ecke von $P(A, b)$. Dann gilt:

☐ Die Spaltenvektoren $A_{\cdot j}$, $j \in \mathrm{supp(x)}$, sind linear unabhängig.
☐ $x$ ist eine echte Konvexkombination von mindestens zwei weiteren Punkten in $P(A, b)$.
☐ $x$ ist eine zulässige Basislösung.

(d) Der Simplex-Algorithmus mit Blands Auswahlregel hat

☐ endliche Laufzeit
☐ polynomiale Laufzeit
☐ unendliche Laufzeit.

(e) Die Menge von Optimallösungen für ein lineares Problem kann

☐ endlich
☐ unendlich
☐ leer sein.

(f) Die Menge von zulässigen Basislösungen für ein lineares Problem kann

☐ endlich
☐ unendlich
☐ leer sein.

(g) Hat ein lineares Problem eine zulässige Lösung, so kann das zugehörige duale Problem

☐ unzulässig sein
☐ zulässig aber unbeschränkt sein
☐ eine endliche Optimallösung haben.

(h) Ist ein lineares Problem unzulässig, so kann das zugehörige duale Problem

☐ unzulässig sein
☐ zulässig aber unbeschränkt sein
☐ eine endliche Optimallösung haben.