Klausur „Einführung in die Optimierung“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Ralf Borndörfer

WS 2010/2011
01.03.2011

Tragen Sie in die nachstehenden Zeilen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter.

Name: .... | Matr. Nr.: ....

Vorname: .... | Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$	Note
Punktzahl	4	4	3	8	4	4	4	9	40	
erreichte Punktzahl										

Hinweise:

a) Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.

b) Als Hilfsmittel zur Klausur sind zugelassen: Ein einfacher Taschenrechner und 2 DIN A4-Blätter handschriftliche Notizen.

c) Zum Bestehen der Klausur werden 50% der Punkte benötigt.

d) Die Ingenieure müssen entweder die Aufgabe 1 oder die Aufgabe 2 lösen. Bitte kreuzen Sie die Aufgabe an, welche Sie bearbeitet haben. Haben Sie nichts oder beides angekreuzt, so wird die Aufgabe 1 korrigiert.

Aufgabe 1	**Aufgabe 2**

Alle anderen lösen die Aufgabe 1.

e) Mobiltelefone sind auszuschalten und in der Tasche zu verstauen.

f) Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zusammen mit einem Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.

g) **Viel Erfolg!**

1. Aufgabe (Konvexität) (4 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex, sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist jedes lokales Minimum des konvexen Optimierungsproblems

$$\min f(x) \text{ s.t } x \in X$$

bereits ein globales Minimum.

2. Aufgabe (Aufgabe für Ingenieure) (4 Punkte)

Gegeben ist die folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} \\ & x_1, x_2, x_3 x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit dualen Simplexverfahren startend von der Basis $B = \{1, 5\}$

3. Aufgabe (Dualität) (3 Punkte)

Geben Sie jeweils die duale Aufgabe für jede der folgenden linearen Optimierungsaufgaben an:

(a)

$$\begin{array}{llll} \min & c^\top x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{llll} \min & c^\top x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \geq & b \\ & Hx & = & d \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{llllll} \min & c^\top x & & & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b & & \\ & 0 & \leq & x & \leq & d \end{array}$$

4. Aufgabe (Primaler und dualer Simplexalgorithmus) (8 Punkte)

Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} (LP) & \min x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_3 \leq 0 \\ & 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie (LP) mit dem Simplexalgorithmus startend von $x^* = (0,0,0)$.

(b) Die dritte Ungleichung von (LP) werde geändert zu $3x_2 + 2x_3 \leq 1$. Lösen Sie dieses neue LP.

(c) Die Zielfunktion von (LP) werde geändert zu $x_1 + \alpha x_2 - 2x_3$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Für welche Werte von α bleibt die Optimallösung die gleiche?

(d) Zu (LP) wird die zusätzliche Ungleichung $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1$ hinzugefügt. Lösen Sie dieses neue LP.

5. Aufgabe (Kodierungslänge) (4 Punkte)

Gegeben ist eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.
Welche Werte kann a annehmen, wenn $\langle a \rangle = 5$? Schreibe alle Möglichkeiten auf und sortiere sie der Größe nach. Welches ist der kleinste Wert, welches der kleinste Wert, der größer als Null ist, welches ist der größte Wert?

6. Aufgabe (Nichtlineare Optimierung) (4 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrl} (NLP) & \min f(x) = & x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 \\ & & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & & x_1 \quad\;\; \leq 2 \end{array}$$

(a) Ist $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein KKT-Punkt?

(b) Ist $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales und/oder globales Optimum?

7. Aufgabe (Modellierung) (4 Punkte)

Ein Mineralölunternehmen kann in einer bestimmten Periode bis zu 9000 ME eines Kraftstoffes zu 190 Euro pro ME absetzen, wenn diese eine Oktanzahl von mindestens 90 aufweist. Zu seiner Herstellung stehen die Kraftstoffe K_i $(i = 1, 2, 3)$ mit unterschiedlichen Oktanzahlen zur Verfi¿½gung, die entsprechend gemischt werden müssen. Sie sollen so gemischt werden, dass eine Oktanzahl von mindestens 90 entsteht. Die Kraftstoffe K_1 und K_2 sind mit jeweils 4000 ME verfügbar, K_3 ist unbeschränkt verfügbar. Einen Überblick über Beschaffungspreise (B-Preise), Oktanzahlen und Verfügbarkeit enthält die folgende Tabelle:

	B-Preise (Eu/ME)	Oktanzahl	max. verfügbar
K_1	180	87,5	4000
K_2	210	100	4000
K_3	140	75	∞

Gefragt ist nach den Mengen der einzelnen Kraftstoffe, aus denen die Mischung gebildet werden soll, damit maximaler Gewinn entsteht. Formulieren Sie ein mathematisches Modell.

8. Aufgabe (Verständnisaufgabe) (9 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Beachten Sie, dass

- jede richitge Antwort einen Punkt bringt;
- für jede falsche Antwort ein Punkt abgezogen wird;
- jede nichtbeantwortete Frage Null Punkte bringt;
- mindestens Null Punkte erreicht werden.

(a) Das Produkt zweier konvexer Funktionen ist wieder eine konvexe Funktion.

(b) Ist das System $Ax \leq \alpha$, $Bx = \beta$ irredundant, so ist auch das System $Ax = \alpha$, $Bx = \beta$ irredundant.

(c) Haben zwei Seitenflächen eines Polyeders die gleiche Dimension, so sind sie identisch.

(d) Wenn der Simplexalgorithmus kreiselt, dann tritt eine degenerierte Basislösung wiederholt auf.

(e) Ist für eine Basislösung eines linearen Programms in Standardform ein reduzierter Kostenkoeffizient positiv, so ist die Basislösung nicht optimal.

(f) Sind für eine Basislösung eines linearen Programms in Standardform die reduzierten Kostenkoeffizienten aller Nichtbasisvariablen nichtnegativ, dann ist die Optimalösung eindeutig.

(g) Hat ein lineares Programm eine eindeutige Optimallösung, so ist diese nichtdegeneriert.

(h) Ist für eine Optimallösung eines linearen Programm eine Ungleichung nicht aktiv, so hat in jeder optimalen Duallösung die entsprechende Dualvariable den Wert Null.

(i) Bei Anwendung der Strategie der aktiven Menge ist es möglich einen Aktivierungsschritt durchzuführen, ohne dass sich der Zielfunktionswert verändert.

	Wahr	Falsch
(a)		
(b)		
(c)		
(d)		
(e)		
(f)		
(g)		
(h)		
(i)		