Einführung in die Optimierung
12. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
31.1. und 01.02.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Die Ellipsoidmethode)

(a) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens, um zu entscheiden, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht?

(b) In der ersten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_1 = (0,0)^T$ und $A_1 = 2I$ gegeben. Sei $x + y \le -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Bestimme a_2 und A_2 und stelle die Ellipsoide $\mathscr{E}_1$ und $\mathscr{E}_2$ sowie die Geraden $g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = -1\}$ und $g_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ graphisch dar.

Aufgabe G2 (Streuung und Kodierungslänge)

Gegeben ist eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.
Welche Werte kann a annehmen, wenn $\langle a \rangle = 5$? Schreiben Sie alle Möglichkeiten auf und sortieren Sie diese der Größe nach. Welches ist der kleinste Wert; welches der kleinste Wert, der größer als Null ist; welches ist der größte Wert?

Aufgabe G3 (Innere-Punkte-Verfahren)

Wir möchten uns nun wieder mit dem Innere-Punkte-Verfahren aus Aufgabe H2 von Blatt 11 beschäftigen. Betrachen Sie das LP

$$\begin{aligned} \max \ & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \ & x_2 \le 1, \\ & -x_1 \le -1, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(a) Sei

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \\ 1 - 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \end{pmatrix}, \ w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 2\mu - \sqrt{1+4\mu^2} \\ -1 + 2\mu + \sqrt{1+4\mu^2} \end{pmatrix}.$$

und $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2) = (w_1, w_2)$. Zeigen Sie, dass dieser Vektor (x, w, y, z) die Gleichungen (I-IV) aus Aufgabe H2 von Blatt 11 erfüllt.
Damit ist (x, w, y, z) ein stationärer Punkt von L und löst somit (*), weshalb die Lösungen $(x(\mu), w(\mu), y(\mu), z(\mu))$ einen zentralen Pfad bilden.

(b) Zeichnen Sie den zentralen Pfad, also die Lösungen x des Vektors (x, w, y, z) für mindestens 3 Werte von $\mu > 0$ und für $\mu = 0$ in dem Zulässigkeitsbereich des gegebenen LP's ein.

Hausübung

Aufgabe H1 (Der Kettenbruchalgorithmus)
Das Problem, reelle Zahlen durch rationale Zahlen zu approximieren, ist ein altes und bekanntes Problem aus der Zahlentheorie. In dieser Aufgabe wollen wir das zweidimensionale Approximationsproblem angehen. Dieses Resultat ist hilfreich, um die Äquivalenz des Separierungs- und des Optimierungsproblems zu zeigen. Dazu betrachten wir folgendes Problem:
Gegeben sei eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}, 0 < \varepsilon < 1$. Gesucht sind ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Auf den ersten Blick ist nicht einzusehen, dass solch eine rationale Zahl immer existiert, aber genau dies ist der Fall. Mehr noch, eine solche Zahl kann sogar in polynomialer Zeit bestimmt werden. Dazu dient der folgende Algorithmus:

Input: $\alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.
Output: p und q mit $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.

(1) Initialisierung:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha, & a_0 &= \lfloor \alpha \rfloor, \\ g_{-2} &= 0, & g_{-1} &= 1, \\ h_{-2} &= 1, & h_{-1} &= 0, \\ i &= -1. \end{aligned}$$

(2) Führe die folgenden Schritte durch:
(3) $i = i + 1$
(4) $g_i = a_i g_{i-1} + g_{i-2}$
(5) $h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}$
(6) Falls $h_i > \frac{1}{\varepsilon}$ **STOP** (gib $p = g_{i-1}$ und $q = h_{i-1}$ aus).
(7) Falls $\alpha_i = a_i$ **STOP** (gib $p = g_i$ und $q = h_i$ aus).
(8) $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}$
(9) $a_{i+1} = \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor$
(10) Gehe zu (3).

Approximieren Sie den Wert $\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$ mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0,01$ durch eine rationale Zahl. D.h. finden Sie

$$p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } |\sqrt{3} - \frac{p}{q}| < \frac{0,01}{q}, \quad 1 \leq q \leq 100.$$

Aufgabe H2 (Die Ellipsoidmethode)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Ellipsoidmethode einen zulässigen Punkt des Polytopes $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_i \leq 2, i = 1,2\}$. Beginnen Sie mit $R = 3$ für $\mathscr{E}_0$. Irrationale Zahlen sollen mit Hilfe des Algorithmus aus Aufgabe H1 gerundet werden. Sie dürfen annehmen, dass dies keine weiteren Auswirkungen auf die Korrektheit der Ellipsoidmethode hat.

Aufgabe H3 (Modellierung)
Einem Investor stehen am Montag 100 € zur Verfügung. Von Montag bis Freitag hat er jeden Tag folgende Wahl:

- x € und am nächsten Tag $(0,5 \cdot x)$ € investieren und dafür am dritten Tag $(2 \cdot x)$ € zurück bekommen oder
- nichts zu investieren.

Wenn am zweiten Tag keine $(0,5 \cdot x)$ € investiert werden, so ist der Einsatz verloren. Es wird außerdem davon ausgegangen, dass der Gewinn am dritten Tag sofort wieder investiert werden kann. Es gibt keine Zinsen und Leihen ist nicht erlaubt. Ziel ist die Maximierung der Vermögens am Samstag.

Eine *Greedy*-Strategie könnte folgendermaßen aussehen:
investiere am Montag $(\frac{2}{3} \cdot 100)$ € und am Dienstag $(\frac{1}{3} \cdot 100)$ €. Der Gewinn steht am Mittwoch zur Verfügung und kann am Mittwoch /Donnerstag auf dieselbe Weise investiert werden.

Finden Sie mit Hilfe von Zimpl (und einem LP-Solver Ihrer Wahl) eine bessere Strategie und vergleichen Sie diese mit der *Greedy*-Lösung. Schicken Sie Ihr zpl-File mit Angabe und der Ausgabe Ihres LP-Solvers und Ihrer Auswertung als Kommentar per eMail bis zu Beginn der 13. Übung an Ihren Übungsleiter.