Einführung in die Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
24./25.01.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ellipsoide)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie das Ellipsoid $\mathcal{E}(A,a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid

$$\mathcal{E}(A,a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$$

das Bild der Einheitskugel $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_2 \leq 1\}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{\frac{1}{2}}u + a$ ist. Damit ergibt sich als äquivalente Darstellung von $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(A,a) = \{a + A^{\frac{1}{2}}u \mid \|u\|_2 \leq 1\}.$$

Aufgabe G2 (Größe der Ecken von Polyedern)

Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^4 | Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 | Bx \leq d, x \geq 0\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine beliebige Ecke von P und sei $v_i, 1 \leq i \leq 4$, eine beliebige Koordinate von v. Geben Sie obere Schranken für den Absolutbetrag des Zählers von v_i, für den Absolutbetrag des Nenners von v_i und für $|v_i|$ an. Lösen Sie dieselbe Aufgabe für eine beliebige Ecke $q = (q_1, q_2, q_3)$ von Q. Kann man diese Schranken verbessern?

Aufgabe G3 (Modellierung)

Arbeiten Sie sich in die Modellierungssprache **zimpl** ein.
`http://zimpl.zib.de/download/zimpl.pdf`

Hausübung

Aufgabe H1 (Ellipsoide)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und seien $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1. \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, dass Ellipsoide konvexe Mengen sind.

Aufgabe H2 (Innere-Punkte-Verfahren)

Neben Simplex-und Ellipsoidmethode gibt es noch eine weitere Klasse von Verfahren zur Lösung von LP's. Anstatt wie im Simplexalgorithmus die Ecken des Zulässigkeitsbereichs abzuwandern, verfolgen diese Methoden einen 'zentralen Pfad' im Inneren des Polytops, bis sie gegen einen Optimalpunkt konvergieren. Wir wollen nun ein Beispiel eines solchen zentralen Pfades betrachten.

Wir möchten das LP $\max c^T x,\ s.t.\, Ax \leq b,\ x \geq 0$ lösen. Das Einführen von Schlupfvariablen liefert die Nebenbedingungen $Ax + w = b, x \geq 0, w \geq 0$. Für ein $\mu > 0$ betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} &\max c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) \\ &s.t.\, Ax + w = b. \end{aligned} \tag{*}$$

Für jeden inneren Punkt des Polytops $P := \{(x,w) : Ax + w = b, x \geq 0, w \geq 0\}$ gilt $(x,w) > 0$. Da der Logarithmus für Werte gegen 0 immer negativer wird, wird die obige Zielfunktion immer kleiner, je näher (x,w) dem Rand kommt. Unter geeigneten Voraussetzungen, gibt es für jedes $\mu > 0$ eine Lösung $(x^*(\mu), w^*(\mu))$ von (*) und $(x^*(0), w^*(0))$ ist offensichtlich die Lösung des ursprünglichen Problems. Wir wollen nun die Lösungen von (*) untersuchen.

(a) Sei

$$L(x,w,y) = c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) + y^T(b - Ax - w)$$

die sogenannte Lagrangefunktion zu (*). Man kann zeigen, dass ein stationärer Punkt von $L(x,w,y)$, also ein Punkt, für den der Gradient ∇L verschwindet, das Optimierungsproblem (*) maximiert. Zeigen Sie, dass ein stationärer Punkt (x^*, w^*, y^*) von L folgende Gleichungen erfüllt:

$$Ax + w = b, \tag{I}$$
$$A^T y - z = c, \tag{II}$$
$$y_i w_i = \mu,\ i = 1, \ldots m, \tag{III}$$
$$x_j z_j = \mu,\ j = 1, \ldots n. \tag{IV}$$

(b) Das System (I) beschreibt die Gleichungsrestriktionen unseres ursprünglichen LP's, das System (II) beschreibt die Gleichungsrestriktionen des dazu dualen LP's. Für $\mu = 0$ sollten Ihnen die Gleichungen (III) und (IV) bekannt vorkommen. Woher?

Aufgabe H3 (Modellierung)

(a) Modellieren Sie das lineare Problem aus Aufgabe H3(a) von Blatt 7 in zimpl und lösen Sie es mit einem LP-Solver Ihrer Wahl. Schicken Sie Ihre zpl-Datei mit ausführlichen Kommentaren und der Angabe und Ausgabe des von Ihnen gewählten Solvers (bspw. SoPlex, ...) als Kommentar in Ihrer zpl-Datei bis zu Beginn der 12. Übung per eMail an Ihren Übungsleiter.

(b) Verschiedene LP-Solver geben verschiedene optimale Basislösungen aus. Interpretieren Sie diesbezüglich Ihre Lösung aus Aufgabenteil (a).