Einführung in die Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
17./18.01.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Reoptimierung)

(a) Lösen Sie folgendes LP per Hand mit Hilfe von Algorithmen aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1 - x_2 - 5x_3 - 5x_4 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Danach stellt sich heraus, dass bei der Optimierung eine wichtige Restriktion vergessen wurde.

$$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$$

Lösen Sie das so entstandene LP per Hand mit Hilfe der Lösung aus Aufgabenteil (a) und Algorithmen aus der Vorlesung.

(c) Nach Ihrer Reoptimierung wird festgestellt, dass die Zielfunktionskoeffizienten falsch kalkuliert wurden. Die neue Zielfunktion lautet

$$\min\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4.$$

Lösen Sie das so entstandene LP per Hand mit Hilfe der Lösung aus Aufgabenteil (b) und Algorithmen aus der Vorlesung.

Aufgabe G2 (Kodierungslänge)

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ gilt: $|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$.

(b) Für je zwei rationale Zahlen $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt: $\langle rs \rangle \leq \langle r \rangle + \langle s \rangle$.

Aufgabe G3 (Laufzeit)

Betrachten Sie Algorithmus $\mathscr{A}_1$, der die Urversion des Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ darstellt. Hat dieser eine polynomiale Laufzeit? Bei der Laufzeitanalyse können Vergleiche, Zuweisungen und Subtraktionen als elementare Rechenschritte angesehen werden.

Hausübung

Aufgabe H1 (Reoptimierung)

(a) Ihr Vorgesetzter gibt Ihnen folgendes LP. Lösen Sie dieses per Hand mit Hilfe von Algorithmen aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & 3x_1 - x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Algorithm $\mathscr{A}_1$: Urversion des Euklidischen Algorithmus

INPUT: $a, b \in \mathbb{N}$
OUTPUT: $\mathrm{ggT}(a, b)$

while $b \neq 0$ **do**
  if $a > b$ **then**
    $a \leftarrow a - b$
  else
    $b \leftarrow b - a$
  end if
end while
return a

(b) Danach stellt sich heraus, dass bei der Modellierung ein wichtiger Rohstoff vergessen wurde. Somit wird eine neue Variable benötigt. Diese geht in die erste Restriktion mit -1, in die zweite mit $+5$ ein, soll natürlich nichtnegativ sein und hat einen Zielfunktionskoeffizienten von $+2$ (alle Angaben beziehen sich auf die Formulierung aus Aufgabenteil (a)). Lösen Sie das so entstandene LP per Hand mit Hilfe der Lösung aus Aufgabenteil (a) und Algorithmen aus der Vorlesung.

(c) In der Zwischenzeit spricht Ihr Vorgesetzter mit dem Kunden. Aus diesen Verhandlungen ergibt sich, dass sich die rechte Seite des LPs aus Aufgabenteil (b) zu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$ ändert. Wie lautet die Optimallösung, wenn Sie diese Veränderung zusätzlich berücksichtigen?

(d) Nach Ihrer Reoptimierung wird festgestellt, dass der Faktor 1 mit dem die Variable x_1 in die erste Restriktion eingegangen ist, falsch kalkuliert wurde. Dieser wird nun auf 3 korrigiert. Lösen Sie das so entstandene LP per Hand mit Hilfe der Lösung aus Aufgabenteil (c) und Algorithmen aus der Vorlesung.

Hinweis: Wenden Sie die Methoden der Sensitivitätsanalyse in dieser Aufgabe an (Nicht jeden Aufgabenteil unabhängig von den anderen lösen!). Die Änderungen sind immer bezüglich des LPs in der Form aus Aufgabenteil (a) gegeben. Die Änderungen sind zeitlich nacheinanderfolgend, d.h. in Teil (d) sind auch Änderungen aus (b) und (c) zu berücksichtigen.

Aufgabe H2 (Kodierungslänge und Laufzeit)

(a) Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \min & \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\ & x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 5 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Bestimmen Sie die Kodierungslänge dieses LPs. Interpretieren Sie dabei alle auftretenden Zahlen als rationale Zahlen!

(b) Betrachten Sie den Algorithmus $\mathscr{A}_2$. Gegeben seien folgende Eingabedaten

Algorithm $\mathscr{A}_2$: Arithmetisches Mittel

INPUT: $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$
OUTPUT: $q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$

$q \leftarrow 0$
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $q \leftarrow q + q_i$
end for
$q \leftarrow \frac{q}{n}$
return q

$$(q_1, \ldots, q_6) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{17}\right).$$

Bestimmen Sie für das durch die gegebene Eingabesequenz resultierende Problem Π explizit die Laufzeit $L_{\mathscr{A}_2}(\Pi)$.

Aufgabe H3 (Laufzeit)

Betrachten Sie Algorithmus $\mathscr{A}_3$, der eine moderne Version des Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ darstellt. Hat dieser eine polynomiale Laufzeit? Bei der Laufzeitanalyse können Vergleiche, Zuweisungen und modulo-Rechnungen als elementare Rechenschritte angesehen werden.

Algorithm $\mathscr{A}_3$ **:** Moderne Version des Euklidischen Algorithmus

INPUT: $a, b \in \mathbb{N}$
OUTPUT: $\mathrm{ggT}(a, b)$

```
while b ≠ 0 do
    h ← a mod b
    a ← b
    b ← h
end while
return a
```