Einführung in die Optimierung
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
20./21.12.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Phase I)
Lösen Sie das folgende LP per Hand mit Algorithmus 5.17 und 5.6 aus der Vorlesung.

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ & -3x_1 + x_2 & = & -20 \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 100 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe G2 (Dualer Simplex-Algorithmus)
Lösen Sie folgendes LP per Hand mit Hilfe des Algorithmus 5.21 aus der Vorlesung.

$$\begin{array}{lrcl} \min & x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & x_2 & \geq & 2 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe G3 (Modellierung)
Der Weihnachtsmann bittet um Hilfe. Er muss bis Weihnachten noch für die Kinder Plätzchen backen. Von seiner Oma hat er Rezepte für n verschiedene Plätzchen, angefangen von einfachen Schokoladen-Keksen, Mandelsplitter, Vanillekipferl bis hin zu Rum-Plätzchen für die älteren Kinder. Der Weihnachtsmann braucht mindestens c_i Plätzchen der Sorte i, welche von seinen fleißigen Helfern anschließend nett verpackt und von ihm selbst an die braven Kinder verteilt werden. Es stehen ihm m Zutaten zur Verfügung und für jedes Plätzchen der Sorte i benötigt er a_{ki} Einheiten der Zutat k. Seine Helfer haben schon gute Vorarbeit geleistet und z_k Einheiten von jeder Zutat k besorgt. Ein Plätzchen der Sorte i benötigt t_i Minuten zum Backen. Da der Weihnachtsmann nicht so geübt im Backen ist, benötigt er für l Plätzchen der Sorte i $l \cdot t_i$ Minuten. Er fragt sich nun, wie viele Plätzchen er am Besten von jeder Sorte backen soll. Außerdem muss in seinen Lagerhallen schon Platz für die Ostersachen geschaffen werden, so dass möglichst alle Zutaten aufgebraucht werden sollen, d.h. das höchstens 5 Einheiten jeder Zutat übrig bleiben sollen. Bitte helfen Sie dem Weihnachtsmann, damit die Geschenke schnellstmöglich zu den Kindern gebracht werden können.

Hausübung

Aufgabe H1 (Dualer Simplex-Algorithmus)
Lösen Sie folgendes LP per Hand mit Hilfe des Algorithmus 5.21 aus der Vorlesung.

$$\begin{array}{lrcl} \min & 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 & & \\ \text{s.t.} & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \geq & 1 \\ & 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 & \geq & 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe H2 (Obere Schranken)
Lösen Sie folgendes LP per Hand mit Hilfe des Algorithmus 5.23 aus der Vorlesung.

$$\begin{array}{rrcl} \min & -x_1 - 2x_2 - x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ & 0 \leq x_1 & \leq & 2 \\ & 0 \leq x_2 & \leq & 10 \\ & 0 \leq x_3 & \leq & 23 \end{array}$$

Beginnen Sie mit der Startbasis $B = (4)$, $N_l = (1,2,3)$ und $N_u = \emptyset$.

Aufgabe H3 (Basen für den dualen Simplex-Algorithmus)
Seien $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang. Das duale LP (in der dualen Standardform) hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{rrcl} \max & b^T y & & \\ \text{s.t.} & A^T y + Iz & = & c \\ & z & \geq & 0 \end{array} . \tag{1}$$

Sei $D := (A^T, I) \in \mathbb{R}^{n \times (m+n)}$. Eine Menge von Indizes $H \subset \{1, \ldots, n+m\}$ heißt *Basis* von (1), wenn D_H regulär ist. Die zugehörige Basislösung ist dann $u_H := D_H^{-1} c$ und $u_{\{1,\ldots,m+n\} \setminus H} := 0$. Eine Basis heißt *zulässig*, wenn $u_{H \cap \{m+1,\ldots,m+n\}} \geq 0$ gilt, das heißt alle Einträge der Basislösung, die zu z gehören, sollen nichtnegativ sein.
Der duale Simplex-Algorithmus betrachtet nur zulässige Basen H mit der Eigenschaft $\{1, \ldots, m\} \subset H$ und wählt aus diesen eine beste. Es soll gezeigt werden, dass mit dieser Vorgehensweise das Problem (1) gelöst wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Das Problem (1) in primaler Standardform lautet

$$\begin{array}{rrcl} \max & b^T y^+ - b^T y^- & & \\ \text{s.t.} & A^T y^+ - A^T y^- + Iz & = & c \\ & y^+, y^-, z & \geq & 0 \end{array} . \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis H von (1) mit gleichem Zielfunktionswert existiert.

(b) Das Problem (2) habe eine Optimallösung. Zeigen Sie, dass dann zu jeder zulässigen Basis B von (2) eine zulässige Basis $\tilde{B}$ existiert, deren Zielfunktionswert größer oder gleich dem von B ist, und die die Eigenschaft erfüllt, dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$i \in \tilde{B} \quad \text{oder} \quad i + m \in \tilde{B} \tag{3}$$

gilt.
Tipp: Nehmen Sie o.B.d.A. an, dass für $i = 1$ die Bedingung (3) verletzt ist, das heißt weder y_1^+ noch y_1^- ist in der zulässigen Basis B. Betrachten Sie die reduzierten Kosten von y_1^+ und y_1^-. Zeigen Sie anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass y_1^+ oder y_1^- gegen ein z_i mit $i \in B$ ausgetauscht werden kann. Teilen Sie dazu γ im Ratio-Test in γ_1, γ_2 auf, wobei γ_1 das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_k \leq 2m$ und γ_2 entsprechend das Minimum für die Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B_k > 2m$ sei.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des bisher Gezeigten den folgenden Satz aus der Vorlesung: Das LP (1) habe eine Optimallösung. Dann gibt es eine optimale Basis H_{opt} mit $\{1, \ldots, m\} \subseteq H_{\text{opt}}$.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2013!