Einführung in die Optimierung
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
01/02.11.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvexe & konkave Funktionen)

(a) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Funktionen konvex, konkav oder keines von beiden sind.

i. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$,

ii. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy - 2x^2 - y^2$,

iii. $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{2x}{y} + y$,

iv. die Norm $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

(b) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $\alpha > 0$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Funktionen konvex sind.

i. αf_1,

ii. $f_1 + f_2$,

iii. $f_1 - f_2$,

iv. $f_1 \cdot f_2$,

v. $\max[f_1, f_2]$,

vi. $\min[f_1, f_2]$.

Aufgabe G2 (Lineares Optimierungsproblem)

Gegeben sei folgendes Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren seien noch die Mengen

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 3\} \qquad \text{und} \qquad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

gegeben.

Bestimmen Sie

(a) graphisch die zulässige Menge $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$.

(b) die Ecken von X.

(c) die sechs Stützhalbräume, deren Durchschnitt genau X ergibt.

(d) graphisch die Mengen X_1 und X_2. Existiert eine Hyperebene, die X_i ($i = 1$ bzw. 2) und X trennt? Geben Sie diese wenn möglich an.

Aufgabe G3 (Modellierung)
Ein Käufer möchte 150 000 Stück einer Ware kaufen. Drei Verkäufer legen Angebote vor, die in der folgenden Tabelle beschrieben sind. Es sind jeweils die Fixkosten (sie entstehen unabhängig davon, wie viel gekauft wird) und die Stückpreise in GE angegeben. Diese können je nach gekaufter Menge variieren. Außerdem ist die Lieferkapazität der Verkäufer beschränkt.
Seien x_1, x_2 bzw. x_3 die Stückzahl, die bei Verkäufer 1, 2 bzw. 3 gekauft wird. Ziel ist es, so einzukaufen, dass die Gesamtkosten minimal sind.

Verkäufer	Fixkosten	Stückpreis	Menge
1	3 520.20	51.20	$0 < x_1 \leq 50\,000$
2	82 810.00	52.10	$0 < x_2 \leq 20\,000$
		51.10	$20\,000 < x_2 \leq 60\,000$
		50.10	$60\,000 < x_2 \leq 80\,000$
		49.10	$80\,000 < x_2 \leq 100\,000$
3	0	60.50	$0 < x_3 \leq 50\,000$
		59.00	$50\,000 < x_3 \leq 80\,000$

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass beispielsweise für Verkäufer 2 das 20 001ste Stück zu einem günstigeren Preis angeboten wird als die ersten 20 000 Stück.
Formulieren Sie das geschilderte Problem als Optimierungsproblem und untersuchen Sie, ob die Zielfunktion und die zulässige Menge konvex oder konkav sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexe Funktionen)

(a) Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Definitionen äquivalent sind:
Definition 1: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in C$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:
$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
Definition 2: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für beliebige Punkte $x_1, \dots, x_p \in C$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ gilt:
$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

Zeigen Sie, dass $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.
Kann auf die Voraussetzung, dass g monoton wachsend ist, verzichtet werden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe H2 (Epigraph und Niveaumenge)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) f ist konvex $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}(f)$ ist konvex.

(b) f ist konvex $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.
Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe H3 (Modellierung)
Ein Betrieb fertigt zwei Produkte $P1$ und $P2$, die unterschiedliche Deckungsbeiträge je t bringen. Bei ihrer Fertigung durchlaufen sie die Anlagen A, B und C, deren monatliche Kapazitäten (in h je Monat) begrenzt sind. Beide Produkte benötigen unterschiedliche Fertigungszeiten (in h je t) auf den Anlagen:

Produkt		$P1$	$P2$	Kapazität
Deckungsbetrag	Euro/t	3000	4000	h pro Monat
Bearbeitungszeit in h/t auf der Anlage	A	3	2	200
	B	1	4	220
	C	7	2	240

Die Fixkosten betragen 36000 Euro pro Monat.

Zu den angegebenen Restriktionen kommen noch folgenden hinzu: Auf Grund vertraglicher Verpflichtungen sind von $P2$ mindestens $20t$ herzustellen; auf dem Markt können höchstens $40t$ von $P2$ abgesetzt werden. Produkt $P1$ kann zur Zeit unbegrenzt abgesetzt werden (Produktion auf Lager ist nicht vorgesehen.) Zusätzlich zu diesen Bedingungen seien noch die knappen Rohstoffe $R1$ und $R2$ zu berücksichtigen. Sie stehen mit monatlich $21t$ ($R1$) bzw. $26t$ ($R2$) zur Verfügung. Für jede t von $P1$ werden $0.2t$ von $R1$ und $0.6t$ von $R2$, für jede t von $P2$ werden $0.5t$ von $R1$ und $0.1t$ von $R2$ verbraucht.

Man erstelle ein mathematisches Modell für dieses Problem! Ist die zulässige Menge konvex? Fertigen Sie eine Skizze an.