Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Florian Sokoli

Wintersemester 2012/2013
7. / 14. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Orthogonale Projektionen und Orthonormalbasen)
Es sei $\mathcal{H}$ ein beliebiger (eventuell unendlichdimensionaler) Hilbertraum.

(a) Beweisen Sie: Sind $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathcal{H}$ mit $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$ und $\lim_{n\to\infty}\eta_n = \eta$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\langle \xi_n, \eta_n\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \ .$$

Definition:
Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ heißt ***abgeschlossen***, wenn für jede konvergente Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $\xi_n \in A$ für alle n auch $\lim_{n\to\infty}\xi_n \in A$ gilt.

(b) Sei $B \subset \mathcal{H}$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$B^\perp := \{\xi \in \mathcal{H} : \langle \xi, \eta\rangle = 0 \ \forall \eta \in B\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ ist.

(c) Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ ein linearer Teilraum. Dann induziert das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{K}$. Beweisen Sie:

$$\mathcal{K} \text{ ist ein Hilbertraum} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{K} \text{ ist abgeschlossen in } \mathcal{H} \, .$$

(d) Ein Satz der Funktionalanalysis besagt:
Ist $\xi \in \mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum, so existieren eindeutig bestimmte Elemente $\xi_\mathcal{K} \in \mathcal{K}$ und $\xi_{\mathcal{K}^\perp} \in \mathcal{K}^\perp$ mit

$$\xi = \xi_\mathcal{K} + \xi_{\mathcal{K}^\perp} \, .$$

Wir definieren dann die ***orthogonale Projektion auf*** $\mathcal{K}$ durch $P_\mathcal{K}\xi := \xi_\mathcal{K}$.
Beweisen Sie:

- $P_\mathcal{K}$ ist ein linearer Operator mit $\left\|P_\mathcal{K}\xi\right\| \le \|\xi\|$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$.
- $P_\mathcal{K}$ erfüllt $P_\mathcal{K}^2 = P_\mathcal{K} = P_\mathcal{K}^*$.

(e) Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossener linearer Teilraum. Bestimmmen Sie die orthogonale Projektion auf $\mathcal{K}^\perp$.

Definition: Sei $B \subset \mathcal{H}$ eine beliebige Teilmenge. Dann definieren wir den ***Abschluss*** von B durch

$$\overline{B} := \left\{ \xi \in \mathcal{H} : \text{es ex. konv. Folge } (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{H} \text{ mit } \xi_n \in B \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi \right\}.$$

Dies ist die kleinste abgeschlossene Menge, die B enthält.

(f) Sei $B \subset \mathcal{H}$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

$$B^\perp = \left(\overline{\operatorname{lin}(B)} \right)^\perp .$$

(g) Ist der Abschluss eines linaren Teilraums wieder ein linearer Teilraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(h) Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein abzählbares Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, $\mathcal{K} := \overline{\operatorname{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ und $\xi \in \mathcal{H}$. Beweisen Sie die Gleichung

$$P_{\mathcal{K}}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \xi, e_i \rangle e_i .$$

(Sie dürfen annehmen, dass die Reihe existiert.)

Definition:
Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ heißt ***Orthonormalbasis***, wenn $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{lin}\{e_i : i \in I\}}$ gilt. $\mathcal{H}$ heißt ***separabel***, wenn $\mathcal{H}$ eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

(j) Sei nun $\mathcal{H}$ separabel, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis und $\xi \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n \rangle e_n .$$

(k) In der physikalischen Literatur findet man häufig die sog. ***Vollständigkeitsrelation***

$$\mathbb{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n| .$$

Inwiefern kann diese Gleichung gelten?

Aufgabe G2 (Multiplikationsoperatoren II)
Auf dem Raum

$$\mathscr{D}(M_f) := \{ g \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) : f\,g \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \}$$

definieren wir den Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} M_f : \mathscr{D}(M_f) &\to L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \\ g &\mapsto f\,g . \end{aligned}$$

In Analogie zu Aufgabe **G2** von Blatt 2 definieren wir weiterhin den ***wesentlichen Wertebereich*** von f durch

$$\operatorname{ess\,Im} f := \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu\left(f^{-1}\left(B_\delta(\mu) \right) \right) > 0 \quad \forall \delta > 0) \right\} .$$

Das ***Spektrum*** von M_f ist definiert durch

$$\sigma(M_f) := \{ \mu \in \mathbb{C} : M_f - \mu\mathbb{1} \text{ besitzt keine stetige Inverse} \}$$

(a) Beweisen Sie: Für $\mu \notin \text{ess Im } f$ ist $\frac{1}{f-\mu} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

(b) Zeigen Sie, dass $g\frac{1}{f-\mu} \in \mathscr{D}(M_f)$ für $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt. Folgern Sie, dass der Operator

$$\begin{aligned} S : L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) &\rightarrow \mathscr{D}(M_f) \\ g &\mapsto \frac{g}{f-\mu} \end{aligned}$$

eine Inverse von $M_f - \mu$ ist. Insbesondere gilt damit $\mu \notin \sigma(M_f)$ (sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass S stetig ist).

(c) Es sei nun $\mu \notin \sigma(M_f)$, d.h. $M_f - \mu\mathbb{1}$ besitzt eine stetige Inverse S. Begründen Sie, dass notwendig $S = M_h$ mit $h = \frac{1}{f-\mu}$ gelten muss.

(d) Sei $a > 1$ und

$$E \subset \left\{x \in \mathbb{R} : |h(x)| > a \left\|M_h\right\|\right\}$$

mit $\lambda(E) < \infty$. Zeigen Sie:

$$a^2 \left\|M_h\right\|^2 \lambda(E) \leq \left\|M_h \chi_E\right\|^2 \leq \left\|M_h\right\|^2 \lambda(E).$$

(e) Folgern Sie $h \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und hieraus wiederum $\mu \notin \text{ess Im } f$. Es gilt also insgesamt

$$\sigma(M_f) = \text{ess Im } f\,.$$

Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass jede messbare Teilmenge endlichen Maßes eine Nullmenge ist, bereits selbst Nullmenge sein muss.

(f) Beweisen Sie, dass M_f genau dann nicht injektiv ist, wenn es eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ gibt, sodass $f|_A = 0$ und $\lambda(A) > 0$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass ein $\mu \in \sigma(M_f)$ genau dann Eigenwert von M_f ist, wenn $\lambda(f^{-1}(\{\mu\})) > 0$ gilt.

Definition: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T : \mathcal{H} \supset \mathscr{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Eine Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ heißt ***approximativer Eigenwert***, wenn es eine Folge von Einheitsvektoren $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(T)$ gibt, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(T - \mu\mathbb{1})\xi_n\right\| = 0$$

gilt. In diesem Fall heißt $(x_n)_{n\in N}$ ein ***approximativer Eigenvektor*** von T. Die Menge

$$\sigma_{ap}(T) := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu \text{ ist approximativer Eigenwert von } T\}$$

heißt ***approximatives Punktspektrum*** von T.

(g) Beweisen Sie:

$$\sigma(M_f) = \sigma_{ap}(M_f).$$

(h) Der ***Ortsoperator*** $Q : \mathscr{D}(Q) \to L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ist der Multipliaktionsoperator M_f mit $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, d.h. für $g \in \mathscr{D}(Q)$ und $x \in \mathbb{R}$ ist

$$(Q(g))(x) = x \cdot g(x)$$

Bestimmen Sie das Spektrum von Q. Hat Q Eigenwerte? Was schließen Sie hieraus für die Messung der Observablen Q?

Aufgabe G3 (Der Impulsoperator)
Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ den Raum der komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Für $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ definieren wir

$$P(f) := if'.$$

(a) Begründen Sie, dass mit $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ auch $P(f) \in \mathcal{C}_c^\infty$ gilt und dass durch die obige Vorschrift ein linearer Operator $P : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass P ***symmetrisch*** ist, d.h. es gilt

$$\langle P(f), g\rangle = \langle f, P(g)\rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

(c) Beweisen Sie die Unbeschränktheit von P, d.h. es gibt eine Folge von Einheitsvektoren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\mathbb{R})$, sodass $\left(\left\|P(f_n)\right\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.