Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik 6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Florian Sokoli

Wintersemester 2012/2013
24. / 31. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Quantenteleportation)
Wir werden in dieser Aufgabe das Phänomen der Quantenteleportation mathematisch modellieren. Dazu nehmen wir an, eine erste Partei (nennen wir sie Alice) möchte einer zweiten Partei (nennen wir sie Bob) einen beliebigen aber fest vorgegebenen reinen Quantenzustand auf $\mathbb{C}^2$ (ein sogenanntes ***Qubit***), repräsentiert durch einen Einheitsvektor $\psi \in \mathbb{C}^2$, übermitteln. Wir nehmen hierzu an, Alice und Bob hätten vor langer Zeit zwei Qubits in einem Zustand $\xi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ erzeugt. Danach sind beide wieder ihrer Wege gegangen, wobei Alice das "linke" und Bob das "rechte" Qubit in $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ behalten hat. Zusammen mit dem Zustand ψ ist Alice jetzt also im Besitz zweier Qubits und das Gesamtsystem wird durch den Raum

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2}_{\text{Alice}} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^2}_{\text{Bob}}$$

beschrieben. Wir nehmen an, dass zu Beginn der Gesamtzustand $\psi \otimes \xi$ vorliege. Da Alice und Bob (bzw. deren Qubits) räumlich voneinander getrennt sind, können beide nur sog. *lokale Operationen* an ihren eigenen Qubits durchführen. Ferner sei es Ihnen erlaubt, klassische Informationen (z.B. gewöhnliche Bits) auszutauschen. Wir werden sehen, dass Alice und Bob durch geeignete Wahl des Zustands ξ und geschicktes Vorgehen den Zustand ψ von Alice zu Bob übertragen können.

(a) Es sei $\{e_1, e_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Wir nehmen an, Alice und Bob hätten für ξ einen sog. ***Bell-Zustand*** gewählt, welcher gegeben ist durch

$$\xi \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$$

Im ersten Schritt wendet Alice ein sog. ***CNOT-Gatter*** an. Dies ist ein unitärer Operator $U_{CNOT} : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, welcher in der kanonischen Produkt-Orthonormalbasis $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$ von $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Zeigen Sie, dass für $\psi = \alpha e_1 + \beta e_2$ gilt:

$$(U_{CNOT} \otimes \mathbb{1}_2)(\psi \otimes \xi) = \alpha e_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + \beta e_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$$

(b) Im zweiten Schritt wendet Alice eine sog. ***Hadamard-Gatter*** $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ auf das erste Qubit (also das "linke" in $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$) an. Dieses hat in der obigen Orthonormalbasis die Matrixdarstellung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}(H \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2)(U_{CNOT} \otimes \mathbb{1}_2)(\psi \otimes \xi) &= \frac{1}{2}\big[e_1 \otimes e_1 \otimes (\alpha e_1 + \beta e_2) + e_1 \otimes e_2 \otimes (\alpha e_2 + \beta e_1) \\ &\quad + e_2 \otimes e_1 \otimes (\alpha e_1 - \beta e_2) + e_2 \otimes e_2 \otimes (\alpha e_2 - \beta e_1)\big].\end{aligned}$$

(c) Schließlich führt Alice nacheinander die Messungen der Observablen $\sigma_z \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2$ bzw. $\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_z \otimes \mathbb{1}_2$ durch und erhält die Messergebnisse λ_1 bzw. λ_2. Bestimmen Sie sämtliche auftretenden Kombinationen von Messwerten (λ_1, λ_2) und geben Sie die zugehörigen resultierenden Zustände nach der Messung an.

Hinweis: Nicht rechnen sondern scharf hinsehen!

(d) Alice teilt nun Bob das (zufällig erhaltene) Messresultat (λ_1, λ_2) mit. Zeigen Sie, dass Bob durch Anwenden des Operators $\sigma_z^{\frac{1-\lambda_1}{2}} \sigma_x^{\frac{1-\lambda_2}{2}}$ auf sein Qubit den Zustand ψ rekonstruieren kann.

Aufgabe G2 (Der Dualraum)
Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt die Menge

$$V^* := \{\varphi : V \to \mathbb{K} : \varphi \text{ ist linear}\},$$

d.h. die Menge der linearen Funktionale auf V, der ***Dualraum*** von V.

(a) Sei $\{b_1, ..., b_n\}$ eine Basis von V. Begründen Sie, dass es für beliebige $i \in \{1, ..., n\}$ genau ein lineares Funktional $b^i \in V^*$ gibt, sodass

$$b^i\left(b_j\right) = \delta_{ij} \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die b^i aus (a) eine Basis von V^* bilden. Sie heißt die zu $\{b_1, ..., b_n\}$ ***duale Basis***. Insbesondere gilt hiermit $\dim V^* = n = \dim V$.

(c) Für $n = 2$ seien $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1', b_2'\}$ Basen von V mit $b_1 = b_1'$. Gilt dann auch $b^1 = b^{1'}$?

(d) Für Basen $\{b_1, ..., b_n\}$, $\{b'_1, ..., b'_n\}$ von V seien die gegenseitigen Entwicklungen

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i{}_j b'_i \quad \text{bzw.} \quad b'_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}^i{}_j b_i$$

gegeben. Beweisen Sie:

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}^j{}_i b^{i\prime} \quad \text{bzw.} \quad b^{j\prime} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^j{}_i b^i.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i{}_j \tilde{\lambda}^l{}_i = \delta_{jl} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^j{}_i \tilde{\lambda}^i{}_l$$

gilt.

Sei $B : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann definieren wir den ***Ausartungsraum*** von B durch

$$V_0 := \{x \in V : B(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}.$$

B heißt ***nicht ausgeartet***, wenn $V_0 = \{0\}$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass V_0 ein Untervektorraum von V ist.

(f) Sei nun B eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} T_B : V &\to V^* \\ y &\mapsto B(\cdot, y) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus definiert wird. Zeigen Sie ferner, dass für eine Basis $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ von V mit dualer Basis $\mathcal{B}^*$ gilt

$$M_{T_B}^{\mathcal{B},\mathcal{B}^*} = \left(g_{ij}\right)_{ij} \quad \text{mit} \quad g_{ij} = B(b_i, b_j).$$

Bemerkung: Ist also ein Vektor $v = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i \in V$ gegeben, so gilt für die Koordinaten a_j des Vektors $T_B(v)$ bezüglich der dualen Basis

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a^i g_{ij}.$$

Dieses Konzept wird in der Relativitätstheorie als "Indexziehen" bezeichnet und $\left(g_{ij}\right)_{ij}$ nennt man den "kovarianten metrischen Tensor". Definiert man den "kontravarianten metrischen Tensor" durch $\left(g^{ij}\right)_{ij} := \left(\left(g_{ij}\right)_{ij}\right)^{-1}$ (was der Abbildung $T_B^{-1} : V^* \to V$ entspricht), so gilt analog

$$a^j = \sum_{i=1} a_i g^{ij}.$$

Abstrakt verbirgt sich dahinter der Übergang in den Dualraum und zurück.

Hausübung

Aufgabe H1 (Purifications)

(a) Es seien beliebige Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{C}^n$ und ein Orthonormalsystem $\{e_1, \dots, e_k\} \in \mathbb{C}^k$ gegeben. Wir setzen

$$\zeta := \sum_{i=1}^{k} \xi_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k.$$

Berechnen Sie $\operatorname{tr}_2\left(t_{\zeta,\zeta}\right)$.

(b) Sei $\rho \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine Dichtematrix. Zeigen Sie, dass es einen Einheitsvektor $\zeta \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ gibt, sodass

$$\rho = \operatorname{tr}_2\left(t_{\zeta,\zeta}\right)$$

gilt. Unter welchen Umständen ist es möglich diese Konstruktion für $\zeta \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k$ mit $k < n$ durchzuführen?

Bemerkung: Diese Prozedur heißt in der Quanteninformationstheorie ***purification***. Man kann also einen beliebigen (eventuell gemischten) Zustand immer als reduzierten Zustand eines reinen Zustands auf einem hinreichend vergrößerten System betrachten. Mathematisch handelt es sich hierbei um eine sog. ***GNS-Darstellung*** des durch ρ induzierten Zustands auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Aufgabe H2 (Schmidt-Zerlegung)

Es sei $\xi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ mit $n \leq m$.

(a) Beweisen Sie: Es gibt Orthonormalsysteme $(e_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{C}^n$, $(f_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{C}^m$ und bis auf Permutation eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, sodass

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes f_i$$

gilt. Die obige Darstellung von ξ heißt ***Schmidt-Zerlegung*** und die λ_i heißen die ***Schmidt-Koeffizienten*** von ξ.

Hinweis: Benutzen Sie den ***Satz über die Singulärwertzerlung***:
Für eine Matrix $A \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ gibt es unitäre Matrizen $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, $V \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ und bis auf Permutation eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ mit

$$A = U \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\in M_{n,m}(\mathbb{C})} V.$$

(b) Beweisen Sie, dass ξ genau dann in der Form $\eta \otimes \zeta$ mit $\eta \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in \mathbb{C}^m$ geschrieben werden kann, wenn ξ höchstens einen nicht verschwindenden Schmidt-Koeffizienten hat.

Bemerkung: Die Schmidt Zerlegung ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Verschränkung reiner Zustände eines bipartiten Quantensystems.