Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Florian Sokoli

Wintersemester 2012/2013
20. Dezember 2012 / 17. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Der Messprozess für allgemeine Zustände)
Es sei $\mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Observable mit Spektraldarstellung $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$. Weiterhin sei ein Dichteoperator $\rho = \sum_{j=1}^{n} \mu_j t_{\psi_j,\psi_j}$ gegeben.

(a) Beweisen Sie:

$$\mathbb{P}_\rho[A = \lambda_i] = \operatorname{tr}(P_i \rho)$$

(b) Es bezeichne $\mathbb{P}[j|A = \lambda_i]$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand ψ_j vorgelegen hat, wenn ein Messung von A den Wert λ_i ergab. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}[j|A = \lambda_i] = \mathbb{P}_{\psi_j}[A = \lambda_i] \frac{\mu_j}{\mathbb{P}_\rho[A = \lambda_i]}$$

Hinweis: Satz von Bayes!

(c) Es bezeichne ρ_i den Dichteoperator, welcher nach Erhalt des Messwertes λ_i von A vorliegt. Begründen Sie die folgende Verallgemeinerung des von Neumann'schen Messpostulates

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[j|A = \lambda_i] \cdot t_{\frac{P_i\psi_j}{\|P_i\psi_j\|}, \frac{P_i\psi_j}{\|P_i\psi_j\|}}$$

und verifizieren Sie

$$\rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{\operatorname{tr}(P_i \rho)}.$$

(d) Das System befinde sich nun wieder im Zustand ρ. Es werde eine Messung der Observablen A *ohne Selektion der Messergebnisse* durchgeführt (d.h., es sei nicht bekannt, welches Messresultat erhalten wurde). Zeigen Sie, dass der Zustand ρ' des Systems nach der Messung gegeben ist durch

$$\rho' = \sum_{i=1}^{k} P_i \rho P_i$$

Aufgabe G2 (Projektionen)

Definition:
Sei $\mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum. Eine lineare Abbildung $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt ***Projektion***, wenn es lineare Teilräume $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ gibt (d.h., es gilt $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \{0\}$ und $\mathrm{lin}\{\mathcal{K}, \mathcal{L}\} = \mathcal{H}$), sodass $P|_{\mathcal{K}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}$ und $P|_{\mathcal{L}} = 0$ gilt.

(a) Machen Sie sich klar, dass es zu beliebigen linearen Teilräumen $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L}$ genau eine lineare Abbildung $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gibt, welche die Bedingungen der obigen Definition erfüllt.

(b) Weisen Sie nach, dass für $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ durch

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Projektion gegeben ist. Bestimmen Sie die Räume $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ und interpretieren Sie die Wirkung von P geometrisch.

(c) Beweisen Sie:

$$P \text{ ist Projektion} \quad \Longleftrightarrow \quad P^2 = P$$

Definition:
Eine Projektion P zu Teilräumen $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ heißt ***orthogonal***, wenn zusätzlich $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$ gilt.

(d) Begründen Sie, dass eine orthogonale Projektion P zu Teilräumen $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ bereits durch Angabe von $\mathcal{K}$ eindeutig festgelegt ist.

Bemerkung: Aufgrund dieser 1:1-Beziehung werden lineare Teilräume $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ und orthogonale Projektion $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zuweilen miteinander identifiziert. Man spricht dann von der orthogonalen Projektion *auf* einen Teilraum $\mathcal{K}$ und schreibt hierfür $P_{\mathcal{K}}$.

(e) Ist die Projektion aus (b) orthogonal?

(f) Beweisen Sie:

$$P \text{ ist orthogonale Projektion} \quad \Longleftrightarrow \quad P^2 = P = P^*$$

(g) Zeigen Sie, dass für einen linearen Teilraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ gilt

$$P_{\mathcal{K}^\perp} = \mathbb{1} - P_{\mathcal{K}}$$

(h) Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ ein linearer Teilraum mit Orthonormalbasis $\{f_1, \ldots, f_k\}$. Zeigen Sie:

$$P_{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{k} t_{f_i, f_i}$$

(i) Sei $P_1, \ldots, P_k$ eine Familie orthogonaler Projektionen mit $P_i P_j = 0 = P_j P_i$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$P := \sum_{i=1}^{k} P_i$$

eine orthogonale Projektion ist. Was bedeutet die Bedingung $P_i P_j = 0$ geometrisch? Ist P immer noch (orthogonale) Projektion, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist?

(j) Für orthogonale Projektionen P, Q definieren wir $P \leq Q$ durch $Q - P \geq 0$. Zeigen Sie, dass hierdurch eine partielle Ordnungsrelation definiert wird, und dass gilt

$$P \leq Q \quad \Leftrightarrow \quad PQ = P = QP\,.$$

(k) Finden Sie ein Beispiel für zwei orthogonale Projektionen, welche nicht im Sinne von (j) vergleichbar sind.

(l) Für eine Familie orthogonaler Projektionen $(P_i)_{i\in I}$ setzen wir

$$\begin{aligned} \sup_{i\in I} P_i &:= \bigvee_{i\in I} P_i := P_{\mathrm{lin}\{\mathrm{Im}\,P_i : i\in I\}} \\ \inf_{i\in I} P_i &:= \bigwedge_{i\in I} P_i := P_{\bigcap_{i\in I}\mathrm{Im}\,P_i} \end{aligned}$$

Beweisen Sie: Für alle $j \in I$ gilt die Relation

$$\inf_{i\in I} P_i \leq P_j \leq \sup_{i\in I} P_i$$

und ist P eine orthogonale Projektion mit

$$P \leq P_j \quad \text{bzw.} \quad P_j \leq P$$

für alle $j \in I$, so folgt

$$P \leq \inf_{i\in I} P_i \quad \text{bzw.} \quad \sup_{i\in I} P_i \leq P$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Das Kroneckerprodukt von Matrizen)
Für Matrizen $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ definieren wir deren ***Kroneckerprodukt*** durch

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in M_{nm,nm}(\mathbb{C})$$

wobei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

(a) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln zur Bildung des Kroneckerproduktes:

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B) \otimes C &= \alpha A \otimes C + \beta B \otimes C \\ A \otimes (\beta B + \gamma C) &= \beta A \otimes B + \gamma A \otimes C \\ (AB) \otimes (CD) &= (A \otimes C)(B \otimes D) \\ (A \otimes B)^* &= A^* \otimes B^* \end{aligned}$$

für Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ und entsprechend dimensionierte Matrizen A, B, C, D.

(b) Beweisen Sie: Sind A und B invertierbar, selbstadjungiert, positiv, normal, unitär oder orthogonale Projektionen, so besitzt auch $A \otimes B$ die entsprechende Eigenschaft.

Unter den Identifikationen $M_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ können wir auch das Kroneckerprodukt von Vektoren betrachten. Für $\xi \in \mathbb{C}^n$ und $\eta \in \mathbb{C}^m$ ist dann

$$\xi \otimes \eta = \begin{pmatrix} \xi_1 \eta \\ \vdots \\ \xi_n \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nm}$$

(c) Sei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$. Entscheiden Sie, ob der Vektor

$$\xi = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$$

in der Form $\eta \otimes \zeta$ für $\eta, \zeta \in \mathbb{C}^2$ geschrieben werden kann.

(d) Wir versehen $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^{nm}$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Verifizieren Sie die für alle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^n$ und $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}^m$ gültige Beziehung

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$$

(e) Seien $(e_i)_{1 \le i \le n}$ bzw. $(f_k)_{1 \le k \le m}$ Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$. Zeigen Sie, dass durch $(e_i \otimes f_k)_{1 \le i \le n, 1 \le k \le m}$ ein Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^{nm}$ gegeben ist und begründen Sie, dass jede Matrix $A \in M_{nm,nm}(\mathbb{C})$ in der Form

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} a_{ijkl} t_{e_i,e_j} \otimes t_{f_k,f_l}$$

geschrieben werden kann.

(f) Für eine Darstellung von $A \in M_{nm,nm}(\mathbb{C})$ wie in (e) definieren wir

$$\mathrm{tr}_1(A) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} a_{iikl} t_{f_k,f_l} \quad \text{und} \quad \mathrm{tr}_2(A) := \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ijkk} t_{e_i,e_j}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}_1(A)$ bzw. $\mathrm{tr}_2(A)$ wohldefiniert sind, d.h. nicht von der Wahl der Orthonormalbasen $(e_i)_{1 \le i \le n}$, $(f_j)_{1 \le j \le m}$ abhängen und dass hierdurch lineare Abbildungen $\mathrm{tr}_1(\cdot) : \mathbb{C}^{nm} \to \mathbb{C}^m$ bzw. $\mathrm{tr}_2(\cdot) : \mathbb{C}^{nm} \to \mathbb{C}^n$ definiert werden.

Bemerkung: In der Quantenmechanik heißen $\mathrm{tr}_1(\cdot)$ bzw. $\mathrm{tr}_2(\cdot)$ die ***partielle Spur*** über das erste bzw. zweite System. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom "Ausspuren" eines Systems.

(g) Es sei $\rho \in M_{nm}(\mathbb{C})$ eine Dichtematrix. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathrm{tr}_1(\rho)$ und $\mathrm{tr}_2(\rho)$ Dichtematrizen sind und berechnen Sie $\mathrm{tr}_1(\rho)$ für $\rho = \frac{1}{2} t_{\xi,\xi}$ mit ξ wie in (c). Ist dieser Zustand rein?

Bemerkung: Man bezeichnet $\mathrm{tr}_1(\rho)$ und $\mathrm{tr}_2(\rho)$ auch als die ***reduzierten Zustände*** von ρ. Sie erlangen Bedeutung bei der Modellierung eines quantenmechanischen Mehrkörperproblems.