Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Florian Sokoli

Wintersemester 2012/2013
8./15 November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Varianz und Kovarianz)

Definition:
Sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ quadratintegrierbare Zufallsvariablen. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned} E(X) &:= \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) \quad (\textbf{\textit{Erwartungswert}}) \\ V(X) &:= E((X - E(X))^2) \quad (\textbf{\textit{Varianz}}) \\ Cov(X, Y) &:= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \quad (\textbf{\textit{Kovarianz}}) \end{aligned}$$

(a) Verifizieren Sie die Formel

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

(b) Beweisen Sie für $X, Y \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ die Ungleichung

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}.$$

Definition:
Eine Familie von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ heißt ***paarweise unkorreliert***, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt

$$Cov(X_i, X_j) = 0.$$

(c) Beweisen Sie, dass eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ paarweise unkorreliert ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass für integrierbare, unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ auch $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ integrierbar ist, und dass gilt:

$$E(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot \ldots \cdot E(X_n).$$

(d) Es seien $X_1, ..., X_n \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

gilt.

(e) Weisen Sie nach, dass durch

$$L^2(\Omega,\Sigma,P) \times L^2(\Omega,\Sigma,P) \ni (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \int_\Omega f(\omega)g(\omega)\,dP(\omega)$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \Sigma, P)$ erklärt wird.

(f) Drücken Sie nun Varianz, Kovarianz sowie paarweise Unkorreliertheit durch das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \Sigma, P)$ aus. Warum sind die Aussagen aus b) und d) jetzt offensichtlich?[1]

(g) Für $X, Y \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ mit $V(X), V(Y) \neq 0$ definieren wir deren ***Korrelationskoeffizienten*** durch

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}}.$$

Wie interpretieren Sie diese Größe geometrisch? Was geschieht, wenn X und Y unkorreliert sind?

Aufgabe G2 (Spektraltheorie von Multiplikationsoperatoren)

Definition:
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Dann heißt

$$\text{ess sup } f := \inf\{t \in [0,\infty] : |f(\omega)| \leq t \quad \mu\text{-f.ü.}\}$$

das ***wesentliche Supremum*** von f. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= \text{ess sup } f \\ L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ messbar und } \|f\|_\infty < \infty\} \end{aligned}$$

Sei nun (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum (d.h. $\mu(\Omega) < \infty$) und $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Beweisen Sie:

(a) f ist genau dann invertierbar (als Element der Algebra $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$), wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(\omega)| \geq \delta \quad \text{für } \mu-\text{f.a. } \omega \in \Omega.$$

Definition:
Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Dann heißt

$$\text{ess Im} f := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu\left(f^{-1}(B_\delta(\lambda))\right) > 0 \quad \forall \delta > 0\}$$

der ***wesentliche Wertebereich*** von f. Hierbei bezeichnet $B_\delta(0)$ den Ball vom Radius δ um 0.

[1] Aus diesem Grund ist die Varianz ein gutes Streumaß!

(b) f ist genau dann in $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ invertierbar, wenn $0 \notin \operatorname{ess\,Im} f$ gilt.

(c) Für $g \in L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$ gilt

$$\|f g\|_2 \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_2$$

und

$$\begin{aligned} M_f : L^2(\Omega,\Sigma,\mu) &\to L^2(\Omega,\Sigma,\mu) \\ g &\mapsto f g \end{aligned}$$

definiert einen beschränkten linearen Operator auf dem Hilbertraum $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$. Er heißt der zu f gehörige ***Multiplikationsoperator***.

(d) Für $f, g \in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} M_{\lambda f} &= \lambda M_f \\ M_{f+g} &= M_f + M_g \\ M_{f g} &= M_f M_g \\ M_{\overline{f}} &= M_f^* \end{aligned}$$

Bezeichnet 1 die konstante Einsfunktion auf Ω, so gilt ferner

$$M_1 = \mathbb{1}$$

Bemerkung:
Dies zeigt, dass $\mathcal{M} := \{M_f : f \in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)\}$ eine unitale $*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(L^2(\Omega,\Sigma,\mu))$ ist. Man kann zeigen, dass es sich hierbei sogar um eine sog. ***von Neumann Algebra*** handelt.

(e) Für $f \in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ gilt:

$$M_f \text{ ist stetig invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist in } L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu) \text{ invertierbar}$$

Hinweis zur Implikation "$\Rightarrow$":
Nehmen Sie an, ein $f \in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ sei in $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ nicht invertierbar, aber M_f besitze eine stetige Inverse T. Konstruieren Sie nun eine Folge von Einheitsvektoren $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$, sodass $(M_f g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^2-Nullfolge ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

(f) Definieren wir das ***Spektrum*** von M_f durch

$$\sigma(M_f) := \{\lambda \in \mathbb{C} : M_f - \lambda\mathbb{1} \text{ nicht stetig invertierbar}\}$$

so gilt

$$\sigma(M_f) = \operatorname{ess\,Im} f\,.$$

(g) M_f ist genau dann nicht injektiv, wenn es ein $A \in \Sigma$ gibt, sodass $f|_A = 0$ und $\mu(A) > 0$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass ein $\lambda \in \sigma(M_f)$ genau dann Eigenwert von M_f ist, wenn $\mu(f^{-1}(\{\lambda\})) > 0$ gilt.

(h) Ist $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und μ das Zählmaß auf (Ω, Σ), so gibt es Isomorphismen

$$\begin{aligned} L^2(\Omega, \Sigma, \mu) &\cong \mathbb{C}^n \\ \mathcal{M} &\cong D_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Wie können Sie das Spektrum eines Multiplikationsoperators $M_f \in \mathcal{M}$ via $\mathcal{M} \cong D_n(\mathbb{C})$ charakterisieren?.

Bemerkung: Diese Beobachtung zeigt, dass Multiplikationsoperatoren eine natürliche Verallgemeinerung der Diagonalmatrizen sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (Projektionswertige Maße und Spektralprojektionen in der linearen Algebra)
Es sei $M \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine normale Matrix. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$\mathcal{H}_\lambda := \{x \in \mathbb{C}^n : Mx = \lambda x\}$$

und P_λ bezeichne die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_\lambda$.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist $P_\lambda \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert von M ist.

Definition:
Es sei (Ω, Σ) ein Messraum. Eine Abbildung $P : \Sigma \to M_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt ***projektionswertiges Maß***, wenn gilt:

- Für alle $A \in \Sigma$ ist $P(A)$ eine orthogonale Projektion.
- Es gilt $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = \mathbb{1}$.
- Für eine Folge paarweiser disjunkter, messbarer Mengen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in Σ gilt

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n$$

(b) Es bezeichne $\mathcal{B}$ die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathcal{B} &\to M_{n,n}(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto \sum_{\lambda \in A} P_\lambda \end{aligned}$$

ein projektionswertiges Maß auf $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ definiert wird. Hierbei ist "$\sum_{\lambda \in A} \dots$" als Summe über diejenigen λ zu verstehen, für welche $P_\lambda \neq 0$ gilt. Für ein $A \in \mathcal{B}$ heißt $P(A)$ die ***Spektralprojektion*** von A.

(c) Bestimmen Sie die Spektralprojektion der sog. ***Pauli-Matrizen***:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Sei $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix mit

$$M = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^*$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von M bezeichnen. Für eine Funktion $f : \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$f(M) := U\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))U^*$$

Beweisen Sie, dass

$$f(M) = \sum_{\lambda \in \sigma(M)} f(\lambda) P_\lambda$$

gilt.

Bemerkung: Die obige Gleichung kann als Integral bezüglich des projektionswertigen Maßes P verstanden werden.