Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Florian Sokoli

Wintersemester 2012/2013
25. Oktober / 1. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvexe Mengen)

Definition:
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei hier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gelten kann. Eine Teilmenge $K \subset V$ heißt ***konvex***, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $\lambda \in [0,1]$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ gilt. Für Elemente $x_1, ..., x_n \in V$ und Zahlen $\lambda_i \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

eine ***Konvexkombination*** der $x_1, ..., x_n$.

(a) Welche der folgenden Mengen sind konvex?
- Die leere Menge.
- Die Einheitssphäre $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.
- Lineare Teilräume.
- Einpunktmengen.
- Die Einheitskugel
$$B_1 := \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$$
eines normierten Vektorraums V.
- Tori.
- Die Menge der positiv-semidefiniten $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$.

(b) Es sei $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie konvexer Mengen in V. Zeigen Sie, dass auch $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ konvex ist. Gilt dies auch für Vereinigungen konvexer Mengen?

(c) Sei $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass es eine kleinste konvexe Menge $K_M \subset V$ gibt, welche M enthält. Hierbei ist "klein" im Sinne mengentheoretischer Inklusion zu verstehen.

(d) Für $M \subset V$ heißt

$$\operatorname{conv}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i : n \in \mathbb{N},\, m_i \in M,\, 0 \leq \lambda_i \leq 1,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

die ***konvexe Hülle*** von M. Zeigen Sie:

$$K_M = \operatorname{conv}(M)\,.$$

Aufgabe G2 (Seiten und Extremalpunkte konvexer Mengen)

Definition:
Es sei $K \subset V$ eine konvexe Menge. Eine Teilmenge $F \subset K$ heißt ***Seite*** (face) in K, wenn F konvex ist und für alle $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ die Implikation

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in F \quad \Rightarrow \quad x, y \in F$$

gilt.

(a) Geben Sie Beispiele für Seiten (im Sinne der obigen Definition) eines Quadrates und eines Würfels.

(b) Zeigen Sie: Ist F eine Seite in K und G eine Seite in F, so ist G eine Seite in K.

(c) Wie würden Sie die Dimension einer Seite definieren?

Definition:
Ist $\{e\} \subset K$ eine einelementige Seite, so heißt e ***Extremalpunkt*** von K. Die Menge aller Extremalpunkte von K wird mit $\operatorname{ext} K$ bezeichnet.

(d) Machen Sie sich klar:
Die Extremalpunkte einer konvexen Menge K sind genau diejenigen Punkte, welche nicht als nichttriviale Konvexkombination von Elementen von K geschrieben werden können.

(e) Was sind die Extremalpunkte eines Quadrates und eines Würfels? Was die einer Kugel?

(f) Geben Sie ein Beispiel für eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, welche keine Extremalpunkte besitzt.

(g) Zeigen Sie: Ist $F \subset K$ eine Seite, so gilt

$$\operatorname{ext} F = F \cap \operatorname{ext} K\,.$$

Gilt dies auch für beliebige konvexe Teilmengen von K?

(h) Beweisen Sie, dass die Extremalpunkte der Einheitskugel eines normierten Vektorraums notwendig Einheitsvektoren sein müssen. Kennen Sie Fälle, in denen auch die Umkehrung gilt bzw. nicht gilt?

Aufgabe G3 (Simplizes als konvexe Mengen)

Definition:
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt ***n*-Simplex**, wenn es $n+1$ nicht in einer Hyperebene liegende Vektoren $x_1, \ldots, x_{n+1} \in V$ gibt, sodass

$$S = \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\})$$

gilt.

(a) Was sind Simplizes in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ anschaulich?

(b) Zeigen Sie: Jedes $s \in S$ kann als eindeutige Konvexkombination der $x_1, \ldots, x_{n+1}$ geschrieben werden.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{ext} S$. (Tipp: Die Anschauung aus (a) ist hier sehr hilfreich!)

(d) Kann man die Punkte einer konvexen Menge immer als eindeutige Konvexkombination ihrer Extremalpunkte schreiben?

Hausübung

Aufgabe H1 (Wahrscheinlichkeitsmaße auf Simplizes)

Definition:
Sei $K \subset V$ eine konvexe Menge. Eine Funktion $h : K \to \mathbb{R}$ heißt ***affin***, wenn für alle $x, y \in K$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$

Der Raum der affinen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$ sei mit $\operatorname{Aff}(K, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Es sei nun V ein normierter Raum, $S = \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \subset V$ ein n-Simplex und μ ein Borel Wahrscheinlichkeitsmaß auf S.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \delta_i : S &\to \mathbb{R} \\ p = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &\mapsto \lambda_i \end{aligned}$$

für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ eine affine Funktion auf S gegeben ist. Warum ist diese wohldefiniert?

(b) Wie kann man den Punkt

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\int_S \delta_i(p)\, d\mu(p) \right) x_i$$

anschaulich interpretieren?

(c) Beweisen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes Element $p_\mu \in S$ gibt, sodass

$$\int_S h(p)\, d\mu(p) = h\left(p_\mu\right) \quad \forall h \in \mathrm{Aff}(S, \mathbb{R})$$

gilt.

Aufgabe H2 (Der Simplex der Zustände auf endlichen Zustandsräumen)

(a) Es sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ein endlicher Zustandsraum. Beweisen Sie, dass die Menge der Zustände

$$\mathcal{S}(\Omega) := \{p : \Omega \to \mathbb{R} : p \text{ ist W.-Verteilung auf } \Omega\}$$

ein $(n-1)$-Simplex ist.

(b) Für eine Observable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathcal{S}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) p(\omega_i) \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für eine Observable $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ ist $\widehat{f} \in \mathrm{Aff}(\mathcal{S}(\Omega), \mathbb{R})$ und die Zuordnung

$$\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}) \ni f \mapsto \widehat{f} \in \mathrm{Aff}(\mathcal{S}(\Omega), \mathbb{R})$$

definiert einen Isomorphismus von Vektorräumen. Hierbei werde der Raum der reellwertigen Funktionen auf Ω mit $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ bezeichnet.

(c) Beweisen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus zwischen dem Raum der Observablen auf Ω und dem Raum der reellen $n \times n$-Diagonalmatrizen $D_n(\mathbb{R})$ gibt. Wie kann man die Zustände in diesem Bild charakterisieren?

(d) Im Sinne der Identifikation $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}) \cong D_n(\mathbb{R})$ sei $F \in D_n(\mathbb{R})$ eine Observable und $\rho \in D_n(\mathbb{R})$ ein Zustand. Zeigen Sie:

$$\widehat{F}(\rho) = \mathrm{tr}(F\rho)$$