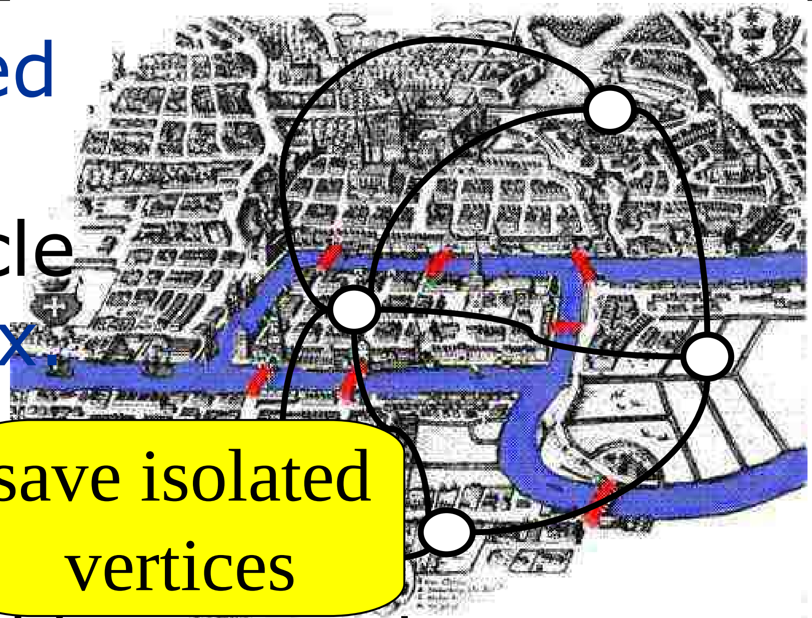
Example Problems (I)

Eulerian cycle in an undirected graph G traverses each edge precisely 1x; Hamiltonian cycle visits each vertex precisely 1x.



G admitting a Eulerian cycle is connected and has an even number of edges incident to each vertex

save isolated vertices

Theorem: Conversely every connected graph with an even number of edges incident to each vertex admits a Eulerian cycle.

$\mathbf{EC} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ admits a Eulerian cycle} \} \in \mathbf{P}$

$\mathbf{HC} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ admits a Hamiltonian cycle} \}$ **?**

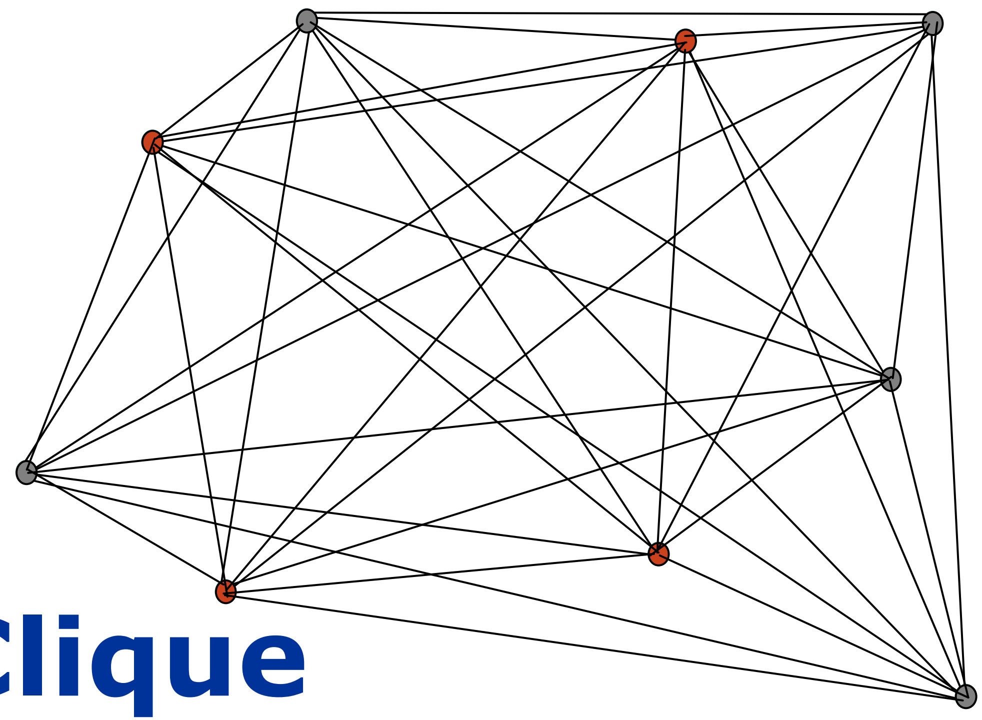
Example Problems (II)

- Eulerian **(EC)** vs. Hamiltonian Cycle **(HC)**
- **Edge Covering (EC)** vs. $\in \mathbf{P}$
- **Vertex Covering (VC)** **?**
- *Travelling Salesperson* **TSP** $:= \{ \langle c,k \rangle :$ c admits a Hamiltonian cycle of weight $\leq k$ $\}$ **?**
- **CLIQUE** $:= \{ \langle G,k \rangle \mid G$ contains a k-clique $\}$ **?**
- *Independent Set* **IS** $:= \{ \langle G,k \rangle :$ G contains an independent set of size k $\}$ **?**

VC $= \{ \langle G,k \rangle \mid G=(V,E)$ and $\exists U \subseteq V, |U|=k: \ \forall (x,y) \in E: x \in U \ \vee y \in U \}$ i.e. each edge contains one vertex in U

Beziehungen zwischen Problemen

$A,B \subseteq \Sigma^*$ Entscheidungsprobleme; schreibe „$A \preccurlyeq B$“ für „A ist höchstens so schwer wie B“



Beobachtung:

- **HC $\preccurlyeq$ TSP**
- **Clique $\preccurlyeq$ IS $\preccurlyeq$ Clique**

HC : enthält G einen Hamiltonkreis;

TSP: enthält c einen Hamiltonkreis mit Gewicht $\leq k$

Polynomielle Reduktion

$A \subseteq \Sigma^*$ heißt reduzierbar auf $B \subseteq \Sigma^*$, falls es eine berechenbare, totale Funktion $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt so dass für alle $\underline{x} \in \Sigma^*$ gilt: $\underline{x} \in A \;\Leftrightarrow\; f(\underline{x}) \in B$.
Wir schreiben: $A \preceq B$ (mittels f). „$\preceq$" ist transitiv.
Falls B (semi-) entscheidbar ist und $A \preceq B$ gilt,

dann ist auch A (semi-) entscheidbar.

A heißt *polynomiell* reduzierbar auf B („$A \preceq_{\mathbf{p}} B$"),

falls es eine in *polynomieller* Zeit berechenbare totale Funktion $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt mit $\underline{x} \in A \;\Leftrightarrow f(\underline{x}) \in B \quad \forall \underline{x} \in \Sigma^*$.

Lemma: a) $A \preceq_{\mathbf{p}} B$ und $B \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{P}$

b) $A \preceq_{\mathbf{p}} B$ und $B \preceq_{\mathbf{p}} C \;\Rightarrow A \preceq_{\mathbf{p}} C$ (*Transitivität*)

Beispiel: **CLIQUE** $\preceq_p$ **IS** $\preceq_p$ **CLIQUE**, $f(\langle G,k\rangle) := \langle \overline{G},k\rangle$