Nichtlineare Optimierung
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
10.2.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Dualität)
Stellen Sie die dualen Probleme im Sinne von Kapitel 3.8. zu folgenden (primalen) Problemen auf:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = a, \\ x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{LP}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax \leq a, \\ Bx = b. \end{cases} \end{aligned} \tag{QP}$$

Hier ist $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch positiv definit, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{p,n}$ und $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$. Übernehmen Sie jeweils das innere Infimum in der dualen Zielfunktion als Nebenbedingung ins duale Problem.

Aufgabe G2 (Dualitätslücken)
Berechnen Sie die primale und duale Optimallösung der folgenden Probleme:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & e^{x_1} + 16 e^{x_2} \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{aligned} \tag{P1}$$

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad & f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{falls } x \geq 0 \\ x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0 \end{aligned} \tag{P2}$$

Wie groß ist jeweils die Dualitätslücke (engl. *duality gap*)? Zeigen Sie im Falle einer nicht verschwindenden Dualitätslücke, dass dies kein Widerspruch zu Satz 3.8.4 ist.

Aufgabe G3 (Ausblick: Semidefinite Probleme und Dualität)
Wir betrachten das *semidefinite Optimierungsproblem*

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{R}^{n,n}} \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \langle A_i, X \rangle = b_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ X \in \mathscr{S}^+, \end{cases} \end{aligned} \tag{SDP}$$

wobei $A_i \in R^{n,n}$ symmetrische Matrizen und $b_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ seien, und $\mathscr{S}^+ \subset \mathbb{R}^{n,n}$ den Kegel der symmetrisch positiv semidefiniten Matrizen bezeichne. Weiterhin ist

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^T A) = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} A_{ij}$$

das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^{n,n}$.

(a) Bestimmen Sie das zu (SDP) duale Problem. Betrachten Sie dazu die Lagrange-Funktion

$$L(X, y) = \langle C, X \rangle + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - \langle A_i, X \rangle)$$

mit $X \in \mathscr{S}^+$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Ersetzen Sie beim Aufstellen das beim Aufstellen des dualen Problems auftretende Infimum durch geeignete Nebenbedingungen. Ist das duale Problem wieder ein semidefinites Problem?
Hinweis: Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Dann gilt

$$A \in \mathscr{S}^+ \quad \Leftrightarrow \quad \langle A, B \rangle \geq 0 \text{ für alle } B \in \mathscr{S}^+.$$

Bemerkung. Die Bedingung $X \in \mathcal{S}^+$ für "X ist symmetrisch positiv semidefinit" schreibt man auch oft als $X \succeq 0$.

(b) Untersuchen Sie (SDP) für die konkreten Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das zugehörige duale Problem und zeigen Sie, dass die Optimalwerte von primalem und dualem Problem nicht übereinstimmen.

Hinweis: Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Gilt $A_{ii} = 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$, dann folgt $A_{ij} = 0$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ (Zeilendiagonaldominanz).

Aufgabe G4 (Ausblick: a little more action please)

Wir betrachten *Optimalsteuerungsproblem* (engl. *optimal control problem*):

$$\begin{aligned} \min_{y,u} \quad & \frac{1}{2}\int_\Omega |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\beta}{2}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -\Delta y = u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u_{\min} \le u \le u_{\max} & \text{in } \Omega \end{cases} \end{aligned} \tag{PDEOP}$$

Hier ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $y_d : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $u_{\min} < u_{\max}$ jeweils reelle Zahlen. Wir suchen Funktionen (!) $y, u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die über die partielle Differentialgleichung $-\Delta y = u$ verknüpft sind (die Gleichung könnte z.B. einen physikalischen Vorgang beschreiben). Die Funktion u stellt dabei eine *Steuerung* (engl. *control*) des Vorgangs dar und soll punktweise nach oben und unten durch $u_{\min}$ und $u_{\max}$ beschränkt sein (z.B. könnte Ω irgendein zu erhitzendes Bauteil sein; u beschreibt dann eine Wärmequelle, die z.B. aus technischen Gründen nur eingeschränkt Energie liefern kann). Dabei suchen wir u und y nicht irgendwie, sondern so, dass y im quadratischen Mittel möglichst genau einer gegebenen Funktion y_d entspricht (erstes Integral in der Zielfunktion, das ist eine $L^2(\Omega)$-Norm), und das ganze dabei möglichst wenig Energie kostet (zweites Integral, das β kann vorerst ignoriert werden, es soll aber $\beta > 0$ gelten).
Da es sich hier um ein unendlichdimensionales Optimierungsproblem handelt (wir suchen schließlich Funktionen), können wir die Mittel der Vorlesung nicht direkt anwenden. Wir stellen uns in dieser Aufgabe aber naiv, tun so, als wären y, u nur Vektoren und schreiben (PDEOP) einfach mal etwas anders auf:

$$\begin{aligned} \min_{y,u} \quad & \frac{1}{2}\|y - y_d\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ay = u, \\ u_{\min} \le u, \\ u \le u_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \tag{PDEOP'}$$

wobei A wie eine lineare Abbildung zu sehen und $\|\cdot\|_2$ jeweils eine von einem Skalarprodukt stammende Norm sei.

(a) Stellen Sie formell die KKT-Bedingungen für (PDEOP') auf.

(b) Übersetzen Sie die KKT-Bedingungen wieder zurück in die "nicht-naive" Betrachtungsweise.
Hinweis: Das hier auftretende A ist selbstadjungiert (für reelle Matrizen kennt man das auch als symmetrisch).

(c) Finden Sie eine konkrete Darstellung für die optimale Steuerung $\bar{u}$. Sie dürfen dazu die KKT-Bedingungen als notwendig für Optimalität annehmen, d.h. eine (ACQ) soll gelten. Was passiert für $\beta = 0$?

Bemerkung. Achtung: Obwohl die übersetzten Formulierungen von sowohl Optimierungsproblem als auch Optimalitätsbedingungen hier sehr natürlich zustande kommen, muss man viel Arbeit und Wissen investieren, um Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen bzw. optimale Steuerung mathematisch rigoros zu bearbeiten. Das liegt daran, dass bei unendlichdimensionalen Aufgaben viel mehr Probleme und Fallen auftreten können als im endlichdimensionalen Fall, vgl. Vorlesungen zu Funktionalanalysis, partiellen Differentialgleichungen bzw. Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen/in Funktionenräumen.