Nichtlineare Optimierung
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
3.2.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lokales SQP-Verfahren)
Sei folgendes Optimierungsproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1^2 - 1 + x_2 \leq 0 \\ x_1^2 - 1 - x_2 \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{NLP1}$$

Berechnen Sie ausgehend vom Startpunkt $(x_0, \lambda_0) = ((-2,-1)^T, (0,0)^T)$ einen Schritt des lokalen SQP-Verfahrens (Algorithmus 20 im Skript) für (NLP1).

Aufgabe G2 (Probleme beim SQP-Verfahren, Teil 1: Unzulässige Teilprobleme)
Wir betrachten

$$\min -x_1 - x_2 \quad \text{s.t.} \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \quad x_1, x_2 \geq 0. \tag{NLP2}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung von (NLP2) mit zugehörigen Lagrangemultiplikatoren.

(b) Zeigen Sie, dass der zulässige Bereich des SQP-Teilproblems im Punkt $x = -(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ leer ist.

Aufgabe G3 (Probleme beim SQP-Verfahren, Teil 2: Maratos-Effekt)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1 \quad \text{s.t.} \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \tag{NLP3}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = (1,0)^T$ das globale Minimum von (NLP3) ist und bestimmen Sie den zugehörigen Lagrangemultiplikator $\bar{\mu}$. Zeigen Sie, dass das lokale SQP-Verfahren für Startpunkte $(x_0, \mu_0) \in B_\delta(\bar{x}, \bar{\mu})$, mit $\delta > 0$ klein genug, Q-superlinear gegen $(\bar{x}, \bar{\mu})$ konvergiert.

(b) Seien nun $x_k \in Z \setminus \{\bar{x}\}$ und $\mu_k < -1$ beliebig. Zeigen Sie, dass für die Lösung s_k des SQP-Teilproblems (SQP_k) gilt, dass $P_{\ell_1,\rho}(x_k + s_k) > P_{\ell_1,\rho}(x_k)$ ist. Zeigen Sie dazu

$$|h(x_k + s_k)| > |h(x_k)| \quad \text{und} \quad f(x_k + s_k) > f(x_k).$$

Damit wird im globalisierten SQP-Verfahren der volle Schritt von der Bewertungsfunktion $P_{\ell_1,\rho}$ abgelehnt. Da die Bedingungen $x_k \in Z \setminus \{\bar{x}\}$ und $\mu_k < -1$ für (x_k, μ_k) beliebig nahe bei $(\bar{x}, \bar{\mu})$ gelten, geht das globalisierte SQP-Verfahren hier also nicht zu lokal Q-superlinearer Konvergenz über.