Nichtlineare Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
27.1.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)
Gegeben seien die folgenden, Optimierungsprobleme:

$$\min \; -x_1 - x_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{P1}$$

$$\min \; (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_2 - x_1^2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{P2}$$

(a) Bestimmen Sie für Problem (P1) in den Punkten $x^1 = (4,4)$ und $x^2 = (6,2)$ Lagrange-Multiplikatoren, so dass die KKT-Bedingungen erfüllt sind und geben Sie jeweils den zugehörigen Kegel der kritischen Richtungen an. Überprüfen Sie damit, ob die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie für das quadratische Problem (P2) im Punkt $\bar{x} = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ Lagrange-Multiplikatoren, so dass die KKT-Bedingungen gelten (hier können Ergebnisse aus Übung 10, Aufgabe G1, recyclet werden), und den Kegel der kritischen Richtungen. Ist die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt?

Aufgabe G2 (Konvergenz des Innere-Punkte-Verfahrens)
Wir betrachten

$$\min \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \le 0. \tag{NLPU}$$

Beweisen Sie Satz 3.5.2 der Vorlesung über die Konvergenz des Innere-Punkte-Verfahrens, d.h. beweisen Sie:

Satz 3.5.2. *Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ jeweils stetig differenzierbar und konvex. Der zulässige Bereich Z sei kompakt und sein striktes Inneres Z_0 sei nicht leer.*
Algorithmus 17 verwende einen Barriere-Term der Form $p(x) = \sum_{i=1}^m b(-c_i(x))$ mit $b : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt, konvex und monoton fallend mit $\lim_{t \searrow 0} b(t) = \infty$, sowie eine Folge (τ_k), für die $\lim_{k\to\infty} \tau_k \searrow 0$ gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen:

i) Das Problem (NLPU) *hat eine Lösung $\bar{x}$.*

ii) Die Funktion B_τ ist konvex auf Z_0 für alle $\tau > 0$.

iii) Das Problem (BP_{τ_k}) besitzt stets eine Lösung $x_k = x(\tau_k) \in Z_0$.

iv) Für jede Folge (x_k) von Lösungen für von (BP_{τ_k}) *gilt*

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k) \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\bar{x}).$$

v) Jeder Häufungspunkt von (x_k) ist eine Optimallösung von (NLPU).

Hinweise:

- Zu iii): Zeigen Sie, dass die Z_0-Niveaumenge $N_{\tau_k}(\hat{x}) = \left\{x \in Z_0 : B_{\tau_k}(x) \le B_{\tau_k}(\hat{x})\right\}$ von B_{τ_k} für $\hat{x} \in Z_0$ kompakt ist.
- Zu iv): Zeigen Sie zunächst:
  (a) Es gilt $p(x_k) \le p(x_{k+1})$ und $f(x_k) \ge f(x_{k+1})$.

(b) Zu einem Optimum von (NLPU) $\bar{x}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in Z_0$, so dass $y \in Z_0$ und $f(y) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon$ ist. Betrachten Sie dazu die Verbindungslinie zwischen $\tilde{x}$ und $\bar{x}$ für ein beliebiges $\tilde{x} \in Z_0$.

Aufgabe G3 (Gestörte KKT-Bedingungen und die Log-Barrierefunktion)
Wir betrachten die KKT-Bedingungen des Optimierungsproblems (NLPU). Diese Bedingungen kann man mit einem Parameter $\tau > 0$ stören, indem man statt der Zulässigkeits- und Komplementaritätsbedingung das Folgende fordert:

$$c_i(x) < 0,$$
$$\lambda_i > 0, \quad -c_i(x)\lambda_i = \tau \quad (i \in \{1, \dots m\}).$$

Wie hängen die gestörten KKT-Bedingungen mit der Stationaritätsbedingung für die logarithmische Barriere-Funktion

$$B_\tau(x) = f(x) - \tau \sum_{i=1}^{m} \ln(-c_i(x))$$

zusammen?

Hausübung

Aufgabe H1 (Hessematrix der Log-Barrierefunktion) (6 Punkte)
Wir betrachten nochmals (NLPU) mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f und c. Sei (x_k) eine durch das Barriere-Verfahren erzeugte Folge mit $x_k \to \bar{x}$. Weiter seien die Gradienten der in $\bar{x}$ aktiven Nebenbedingungen linear unabhängig. Zeigen Sie am Beispiel der logarithmischen Barrierefunktion, dass im Fall $\bar{x} \notin Z_0$ und $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ die Norm der Hessematrix von B_{τ_k} explodiert, d.h. zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \nabla^2 B_{\tau_k}(x_k) \right\| = \infty$$

gilt.
Hinweise: Betrachten Sie die Eigenwerte bzw. Eigenschaften der auftretenden Rang-1 Matrizen der Form yy^T. Erinnern Sie sich an H3, Übung 3. Sie dürfen benutzen, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto xy^T$ stetig ist (warum ist sie das?).

Aufgabe H2 (Zentraler Pfad) (6 Punkte)
Wir betrachten das folgende, zueinander duale, Paar linearer Programme

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{(PLP)} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} A^T y + s = c \\ s \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{(DLP)}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind.

(a) Formulieren Sie zu (PLP) bzw. (DLP) jeweils das logarithmische Barriere-Problem (BPLP$_\tau$) bzw. (BDLP$_\tau$) bezüglich der Vorzeichenbedingungen mit Barriere-Parameter $\tau > 0$. Lassen Sie die Gleichungsnebenbedingungen also unverändert.

(b) Sei $\tau > 0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i. Das primale logarithmische Barriere-Problem (BPLP$_\tau$) besitzt eine Lösung x_τ.
   ii. Das duale Barriere-Problem (BDLP$_\tau$) besitzt eine Lösung (y_τ, s_τ).
   iii. Die sogenannten *zentralen Pfadbedingungen*

$$\begin{aligned} A^T y + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x &> 0, \\ s &> 0, \\ x_i s_i &= \tau \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

   besitzen eine Lösung (x_τ, y_τ, s_τ).

(c) Zeigen Sie: Erfüllt (x, y, s) die zentralen Pfadbedingungen, dann gilt

$$x^T s = c^T x - b^T y,$$

das heißt, $x^T s$ ist die Differenz vom primalen und dualen Zielfunktionswert zu den Lösungen x beziehungsweise (y, s). Insbesondere ist der Zielfunktionswert der beiden Probleme (PLP) und (DLP) gleich, sobald $x \perp s$ gilt.

Aufgabe H3 (Inverse Barrierefunktion und gestörte KKT-Bedingungen) (3 Punkte)

Ähnlich wie in Aufgabe G3 lässt sich auch die Bedingung für stationäre Punkte der *inversen Barrierefunktion*

$$B_\tau(x) = f(x) - \tau \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(x)}$$

mit gestörten KKT-Bedingungen vergleichen. Wie?