Nichtlineare Optimierung
4. Rechnerübungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
20.1.2012

Rechnerübung

Aufgabe R1 (Quadratisches Penalty-Verfahren)

(a) Programmieren Sie das quadratische Penalty-Verfahren aus Algorithmus 16 in `matlab`, minimieren Sie also die Penalty-Funktion

$$P_\rho(x) = f(x) + \frac{\rho}{2}\left(\|(c(x))_+\|_2^2 + \|h(x)\|_2^2\right).$$

Verwenden Sie dazu Ihre Implementierung des globalen Newton-Verfahrens und des BFGS-Verfahrens aus den vergangenen Rechnerübungen.

Erhöhen Sie den Penalty-Parameter (Schritt 3 des Penalty-Verfahrens) um den Faktor 10, also durch die Vorschrift $\rho_{k+1} = 10\rho_k$, und wählen Sie $\rho_0 = 1$. Verwenden Sie für das äußere Verfahren – also das quadratische Penalty-Verfahren – die Abbruchbedingung $\|(c(x_k))_+\| + \|h(x_k)\| \leq 10^{-4}$. Führen Sie als zusätzliches Abbruchkriterium eine maximale Anzahl an äußeren Iterationen ein. Geben Sie jeweils aus, wieviele Iterationen das globale Newton- bzw. das BFGS-Verfahren in jeder äußeren Iteration laufen musste.

Hinweis: Sie müssen in jeder Iteration des äußeren Verfahrens die quadratische Penaltyfunktion P_ρ mit neuem Parameter τ an das globale Newton- bzw. BFGS-Verfahren übergeben. Zuweisungen der Form $f(x) := g(x,y)$ für einen festen Wert y können in `matlab` durch den Ausdruck `f=(@(x)g(x,y))` realisiert werden. Für die Übergabe mehrerer Funktions-Objekte könnte sich zudem der Datentyp `Cell Array` als nützlich erweisen.

(b) Testen Sie Ihr Verfahren an dem Problem

$$\min 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2 \quad \text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \leq 0 \tag{P1}$$

mit Startwerten $x_0 = (-1, 0.5)$ und $x_0 = (4, 5)$ (wieso gerade diese?), sowie an dem Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0 \\ 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{P2}$$

mit Startwert $x_0 = (3, 0.2, 3)$.

Aufgabe R2 (Innere-Punkte-Verfahren)

(a) Implementieren Sie das klassische Barriere- bzw. Innere-Punkte-Verfahren (Algorithmus 17) mit der log-Barrierefunktion in `matlab` und verwenden Sie dabei wieder das globale Newton- und das BFGS-Verfahren aus den vergangenen Rechnerübungen.

Wählen Sie die Parameter τ nach der Vorschrift $\tau_{k+1} = \alpha\tau_k$ für ein festes α, z.B. $\alpha = 10^{-1}$, und starten Sie mit $\tau = 1$. Brechen Sie das äußere Verfahren (d.h. das Barriereverfahren) ab, wenn eine festgelegte Anzahl Iterationen überschritten wird, oder wenn das innere Verfahren nicht mehr terminiert. Modifizieren Sie dazu Ihr globales Newton-Verfahren gegebenenfalls.

Hinweis: Die log-Barrierefunktion kann durch eine Funktion dargestellt werden, die für $x < 0$ genau $\ln(-x)$ und für $x \geq 0$ das Negative der `matlab`-Konstanten `realmax` produziert.

(b) Testen Sie Ihr Verfahren an Problem (P1). Vergleichen Sie bei Problem (P1) auch das Verhalten des Innere-Punkte-Verfahrens mit dem Penalty-Verfahren.

(c) Testen Sie Ihr Verfahren weiterhin an folgendem Problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_i(x) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ x \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{P3}$$

mit $f_7(x) = -x_2$ und $f_8(x) = -x_1 - x_2$ und Startwerten aus dem Inneren des Polytops. Zeichnen Sie den zulässigen Bereich in `matlab` und fügen Sie in jeder Iteration des äußeren Verfahrens den aktuellen Punkt in die Zeichnung ein. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse auch mit Aufgabe G1 von Übungsblatt 10. Wie verhält sich das Innere-Punkte-Verfahren im Vergleich zur Simplex-Methode?

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexe Probleme und die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung) (5 Punkte)

(a) Seien im allgemeine Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} c(x) \le 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{NLP}$$

die Gleichungsrestriktionen h affin-linear, sowie f und jedes c_i konvex. Zeigen Sie: Erfüllt $\bar{x}$ die KKT-Bedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$, und ist f streng konvex oder mindestens ein c_i für $i \in \mathscr{A}(\bar{x})$ mit $\bar{\lambda}_i > 0$ streng konvex, so ist $\bar{x}$ ein isoliertes Minimum von f. Benutzen Sie zum Beweis Satz 3.2.20 bzw. modifizieren Sie dessen Beweis.

(b) Seien nun f und c linear und keine Gleichungsrestriktionen vorhanden, d.h. wir betrachten das lineare Problem (vgl. "Einführung in die Optimierung")

$$\min c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \le b \tag{LP}$$

für geeignete Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, sowie $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Geben Sie die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für (LP) an. Zeigen Sie ausserdem, dass es für jeden isolierten Optimalpunkt des Problems Lagrange-Multiplikatoren gibt, so dass die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass die zu zeigende Aussage aus (b) für das allgemeine Problem (NLP) im Allgemeinen nicht gelten muss.

Aufgabe H2 (Trajektorie des Penalty-Verfahrens) (6 Punkte)

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad x_2 \ge 0. \tag{P}$$

Das allgemeine quadratische Penalty-Problem zu (P) lautet

$$\min P_{\rho_k}(x) := f(x) + \frac{\rho_k}{2} \sum_{i=1}^{m} \max\{0, c_i(x)\}^2,$$

wobei $(\rho_k) \subset (0, \infty)$ eine unbeschränkte, streng monoton wachsende Folge ist.

(a) Bestimmen Sie die globale Lösung x^* von (P) und den zugehörigen Lagrangemultiplikator λ^*.

(b) Berechnen Sie für $\rho > 0$ allgemein das globale Minimum $x(\rho)$ von $P_\rho(x)$.

(c) Zeigen Sie $x^* = \lim_{\rho\to\infty} x(\rho)$ und $\lambda^* = \lim_{\rho\to\infty} \rho \max\{0, c(x(\rho))\}$.

(d) Wie verhält sich die Konditionszahl der Hessematrix $\nabla^2 P_\rho(x(\rho))$ für $\rho \to \infty$?

Aufgabe H3 (Exakte Penalty-Funktionen) (3 Punkte)

Betrachten Sie das eindimensionale Optimierungsproblem

$$\min x^2 \quad \text{s.t.} \quad x - 1 = 0,$$

mit der Lösung $x^* = 1$.

(a) Bestimmen Sie $\bar{\rho} > 0$ so, dass die zugehörige ℓ_1-Penalty-Funktion $P_{\ell_1,\rho}(x)$ für alle $\rho \ge \bar{\rho}$ exakt in x^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass die quadratische Penalty-Funktion $P_\rho(x)$ für $\rho = 2$ *nicht* exakt in x^* ist.