Nichtlineare Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
13.1.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (KKT-Bedingungen)
Gegeben seien die folgenden Optimierungsprobleme:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(P1)} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & x_2 - x_1^2 \ge 0 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(P2)}$$

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P1). Skizzieren Sie weiterhin die zulässige Menge und zeichnen Sie in den Eckpunkten jeweils den Gradienten der Zielfunktion und die Gradienten der in der Ecke aktiven Nebenbedingungen ein. Überprüfen Sie nun für jeden Eckpunkt, ob die KKT-Bedingungen gelten, sowohl rechnerisch als auch an der Zeichnung. Geben Sie eine globale Lösung des Problems (P1) an.

(b) Formulieren Sie auch die KKT-Bedingungen für (P2) und überprüfen Sie, ob diese im Punkt $x^* = (3/2, 9/4)$ erfüllt sind. Wie sind die KKT-Bedingungen in x^* geometrisch zu verstehen? Gilt Ihre Interpretation allgemein für Probleme, die nur durch Ungleichungen restringiert sind?

Aufgabe G2 (Constraint Qualifications)
Die Menge $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ sei durch folgende Ungleichungen bestimmt:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 2, \qquad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \le 2, \qquad x_1 \ge 0.$$

Zeigen Sie, dass in $\bar{x} = (0, 0)$ die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) erfüllt ist, die Linear Independence Constraint Qualification (LICQ) jedoch verletzt ist.

Aufgabe G3 (Notwendige Optimalitätsbedingungen für das Trust-Region Verfahren)
Gegeben sei die quadratische Funktion

$$q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \qquad \text{mit } H \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch und } c \in \mathbb{R}^n,$$

und für $\Delta > 0$ das wohlbekannte Trust-Region-Problem

$$\min q(s) \quad \text{s.t.} \quad \|s\|_2 \le \Delta. \qquad \text{(TP)}$$

In Aufgabe H1 vom 3. Rechnerübungsblatt bzw. 8. Übungsblatt haben wir bereits hinreichende Optimalitätsbedingungen für (TP) kennengelernt. Hier zeigen wir nun, dass diese auch notwendig sind. Sei dazu $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung des Trust-Region-Problems (TP).

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\bar{\lambda} \ge 0$ gibt, so dass die Bedingungen
   i. $(H + \bar{\lambda} I)\bar{s} = -c$,
   ii. $(\|\bar{s}\|_2 - \Delta)\bar{\lambda} = 0$, d.h. entweder ist $\|\bar{s}\|_2 = \Delta$ oder es gilt $\|\bar{s}\|_2 < \Delta$ und $\bar{\lambda} = 0$,

   erfüllt sind.
   Hinweis: Verwenden Sie die Nebenbedingung $\frac{1}{2}\|s\|_2^2 \le \frac{1}{2}\Delta^2$ statt $\|s\|_2 \le \Delta$. Auch Aufgabe G3 von Blatt 9 könnte sich als hilfreich erweisen.

(b) Zeigen Sie, dass $(H + \bar{\lambda} I)$ mit dem $\bar{\lambda}$ aus Teilaufgabe (a) positiv semidefinit ist.
   Hinweis: Betrachten Sie $L(s, \bar{\lambda}) - L(\bar{s}, \bar{\lambda})$ für zulässige $s \in \mathbb{R}^n$ direkt und per Taylorentwicklung bezüglich s.

Hausübung

Aufgabe H1 (Slater Constraint Qualification) (6 Punkte)
Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \leq 0, \tag{KP}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jeweils konvex und stetig differenzierbar. Die sogenannte *Slater-Bedingung* lautet: Es existiert einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $c(y) < 0$, d.h. ein innerer Punkt des zulässigen Bereiches.

(a) Zeigen Sie, dass die angegebene Slater-Bedingung die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) für jeden zulässigen Punkt von (KP) impliziert.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage aus Teilaufgabe (a) für nichtkonvexe Nebenbedingungen im Allgemeinen nicht gilt. Konstruieren Sie dazu ein Optimierungsproblem mit (mindestens) einer nichtkonvexen Nebenbedingung, sodass die Slater-Bedingung für ein y erfüllt ist, es aber trotzdem einen zulässigen Punkt gibt, der (MFCQ) verletzt.

Prüfen Sie, ob für Ihr Gegenbeispiel dennoch (ACQ) gilt. Modifizieren Sie Ihr Gegenbeispiel gegebenenfalls so, dass auch (ACQ) trotz Slater-Bedingung nicht gilt.

Aufgabe H2 (KKT-Bedingungen für Spezialfälle) (4 Punkte)
Wir betrachten das allgemeine Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \leq 0$$

für $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jeweils stetig differenzierbar.

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall, dass der Optimalpunkt $\bar{x}$ im Inneren des zulässigen Bereichs $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) \leq 0\}$ liegt. Gilt (ACQ)? Was beobachten Sie?

(b) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall, dass f linear und c affin-linear ist. Kommen Ihnen diese Bedingungen bekannt vor?

Aufgabe H3 (Optimalitätsbedingungen für zweistufige Optimierung) (6 Punkte)
Gegeben seien stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Betrachen Sie folgendes Optimierungsproblem, wobei wir die h_i wie immer zu h zusammenfassen:

$$\min_x \max \left\{ f_1(x), \dots, f_p(x) \right\} \quad \text{s.t.} \quad h(x) = 0. \tag{P}$$

(a) Zeigen Sie, dass Problem (P) äquivalent zu folgendem Problem ist:

$$\begin{aligned} \min_{(x,z)} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \\ & f_j(x) \leq z \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{P'}$$

Wo liegen die Unterschiede der beiden Optimierungsprobleme?

(b) Sei $\bar{x}$ ein Optimalpunkt von (P), und seien die Gradienten $\nabla h_i(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann Vektoren $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p)^T \in \mathbb{R}^p$ und $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m)^T \in \mathbb{R}^m$ existieren, so dass

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j \nabla f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j = 1, \tag{1}$$

$$\text{Für alle } j \in \{1, \dots, p\} \text{ gilt:} \quad \bar{\lambda}_j > 0 \Rightarrow f_j(\bar{x}) = \max \left\{ f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}) \right\}. \tag{2}$$