# Nichtlineare Optimierung
# 9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Stefan Ulbrich**
Hannes Meinlschmidt

**WS 2011-2012**
**16.12.2011**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Optimallösungen des Trust-Region-Verfahrens)
Wir betrachten das übliche Trust-Region-Problem für die quadratische Funktion $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$q(s) = c^T s + s^T H s,$$

wobei $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $c \in \mathbb{R}^n$ ist, also

$$\min_s q(s) \quad \text{s.t.} \ \|s\|_2 \leq \Delta$$

für ein $\Delta > 0$. In H1 von Blatt 8 haben Sie hinreichende Optimalitätsbedingungen für dieses Problem kennengelernt und in H2 (hoffentlich) auch schon benutzt, um eine Lösung eines konkreten Problems zu finden. In dieser Aufgabe soll diese Lösungsmethode allgemein bearbeitet werden. Erfüllt gleich $\lambda = 0$ die Bedingungen mit einem $s \in \mathbb{R}^n$ mit $\|s\|_2 \leq \Delta$, so sind wir fertig. Für $\lambda > \max\{0, -\lambda_{\min}(H)\}$ dagegen definieren wir

$$s(\lambda) := -(H + \lambda I)^{-1} c.$$

Um die dritte Bedingung zu erfüllen, versucht man nun, eine Nullstelle $\lambda > 0$ der Funktion

$$\phi(\lambda) := \|s(\lambda)\|_2 - \Delta$$

zu finden. Folgen Sie dazu folgender Anleitung:

(a) Sei $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine orthogonale Matrix, so dass $Q^T H Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ gilt, wobei $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von $H$ sind. Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq -\lambda_i$ (für $i = 1, \ldots n$) gilt:

$$\|s(\lambda)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T c)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2}.$$

(b) Diskutieren Sie die Existenz von Nullstellen $\lambda > \max\{0, -\lambda_1\}$ von $\phi$, falls $q_1^T c \neq 0$ und $\lambda_1 < 0$ ist.
*Hinweis:* Die Betrachtung von $\lim_{\lambda\to\infty} \|s(\lambda)\|$ und $\lim_{\lambda \searrow -\lambda_1} \|s(\lambda)\|$ hilft.

(c) Untersuchen Sie, was passiert, wenn $H$ positiv definit und $\|s(0)\|_2 > \Delta$ ist.

(d) Es gelten die Annahmen aus Aufgabenteil (b). Zur Bestimmung einer Nullstelle von $\phi$ wenden wir nun das Newton-Verfahren auf $\phi$ an. Was passiert für $\lambda$ nahe $-\lambda_1$? Warum ist es geschickter, die Gleichung $\Phi(\lambda) := \frac{1}{\|s(\lambda)\|} - \frac{1}{\Delta} = 0$ zu lösen?

**Aufgabe G2** (Tangential- und Linearisierungskegel)

(a) Es sei die Menge $Z \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $Z = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$. Diese kann man mit $h(x) = x_2$ und $\hat{h}(x) = x_2^2$ darstellen durch

$$Z = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \hat{h}(x) = 0\right\}.$$

Berechnen Sie $T_L(h; x)$, $T_L(\hat{h}; x)$ und $T(Z; x)$. Welche der Mengen sind gleich, welche nicht? Welche Inklusionen gelten dann?

(b) Sei eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren gegeben. Zeigen Sie, dass $T(M;x) = \mathbb{R}^n$ für alle $x \in \mathring{M}$ gilt. Was ergibt sich mit Satz 3.2.3?

**Aufgabe G3** (Kugelei)
Sei $K = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $r > 0$. Wir umschreiben $x \in K$ durch $c(x) \le 0$ mit $c(x) = x^T x - r^2$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$T_L(c;x) = T(K;x). \tag{1}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie, dass das Problem invariant unter linearen Transformationen, inbesondere also Skalierungen und Rotationen, ist. Es ist also ausreichend, (1) für die Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ und einen "netten" Punkt $x \in \overline{B_1(0)}$ zu zeigen. Zudem kann man das Koordinatensystem so drehen, dass ein gegebener Tangentialvektor an die Kugel zu einem beliebigen Einheitsvektor wird.

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Cauchy-Punkt) (5 Punkte)
In der Vorlesung wurde der *Cauchy-Punkt* als Näherungslösung für das Trust-Region-Problem eingeführt. Der Cauchy-Punkt $s^c$ im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ soll dabei das folgende Minimierungsproblem lösen:

$$\min q(s) := \nabla f(x)^T s + \frac{1}{2} s^T H s \quad \text{s.t.} \quad s = -t \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}, \quad t \in [0, \Delta],$$

mit $\Delta > 0$.

(a) Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \alpha t + \beta t^2 \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha < 0.$$

Zeigen Sie, dass das Problem

$$\min \phi(t) \quad \text{s.t.} \quad 0 \le t \le \tau$$

für jedes $\tau > 0$ genau eine Lösung $t^*$ besitzt, und dass folgende Abschätzung gilt:

$$\phi(t^*) \le \frac{\alpha}{2} \min\left\{ \frac{|\alpha|}{2|\beta|}, \tau \right\}. \tag{1}$$

Hierbei ist für $\beta = 0$ das erste Argument als $+\infty$ zu lesen.

(b) Wenden Sie nun Aufgabenteil (a) nun mit einer geeigneten Funktion $\phi$ und geeignetem $\tau > 0$ an, um den Cauchy-Punkt zu berechnen. Zeigen Sie zudem:

$$q(s^c) \le -\frac{\|\nabla f(x)\|}{2} \min\left\{ \frac{\|\nabla f(x)\|}{\|H\|}, \Delta \right\}.$$

**Aufgabe H2** (Tangential- und Linearisierungskegel) (6 Punkte)
Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} -x_1 \quad \text{s.t.} \quad x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0, \quad -x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0. \tag{1}$$

(a) Ermitteln Sie die Lösung $\bar{x}$ von (1) graphisch.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialkegel $T(Z, \bar{x})$ und den Linearisierungskegel $T_L(c; \bar{x})$ für $\bar{x} = (1,0)$ und den Zulässigkeitsbereich $Z$. Zeigen Sie, dass keine Constraint Qualification in $\bar{x} = (1,0)$ gelten kann.

(c) Geben Sie zwei (unabhängige) lineare Nebenbedingungen an, sodass das Hinzufügen jeweils einer dieser Bedingungen zu (1) bewirkt, dass im Punkt $\bar{x} = (1,0)$ die Abadie Constraint Qualification (ACQ) erfüllt ist, die zulässige Menge jedoch unverändert bleibt.

**Aufgabe H3** (Tangential- und Linearisierungskegel) (3 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionen $c, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$c(x) = x^T x - 1 \quad \text{und} \quad h(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_2 & x_1 \neq 0 \\ -x_2 & x_1 = 0, \end{cases}$$

sowie die Menge $Z \subset \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : c(x) \leq 0, h(x) = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie Tangential- und Linearisierungskegel von $Z$ mit der gegebenen Beschreibung im Punkt 0. Gilt (ACQ)?

**Wir wünschen Ihnen**

# Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2012!

**Die nächsten Übungen finden am 13. bzw. 16. Januar 2012 statt.**