Nichtlineare Optimierung
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
18.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Newton-Verfahren und Startpunktproblematik)
Betrachten Sie die Funktion

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}: x\mapsto -\ln(x)+x.$$

Für welche Startpunkte x_0 konvergiert das Newton-Verfahren für Minimierungsprobleme?

Aufgabe G2 (Noch mehr Startpunktproblematik)
Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=|x|-\arctan(|x|)$. Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion sinnvoll differenzierbar ist und geben Sie die Ableitungen an. Beweisen Sie damit dann, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung dieser Funktion für keinen Startpunkt x_0 mit $|x_0|\geq 2$ gegen das (eindeutige) Minimum von f konvergiert.

Aufgabe G3 (Newton-Verfahren auf $\mathbb{R}$)
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine $m+1$ mal stetig differenzierbare Funktion und x^* eine m-fache Nullstelle von f.

(a) Zeigen Sie zunächst allgemein

$$g\in 1+O\left(\|y\|\right) \iff g\in\frac{1+O\left(\|y\|\right)}{1+O\left(\|y\|\right)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1+O\left(\|y\|\right)}{1+O\left(\|y\|\right)}=1+O\left(\|y\|\right).$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

in Abhängigkeit von m und, im Falle linearer Konvergenz, die Konvergenzrate.
Hinweis: Taylorentwicklungen von $f(x)$ und $f'(x)$ mit Entwicklungspunkt x^* helfen.

(c) Betrachten Sie nun das folgende veränderte Newton-Verfahren

$$x_{k+1}=x_k-\alpha\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

mit einem Parameter $\alpha\in\mathbb{N}$, wobei $\alpha>1$. Für welche m konvergiert dieses Verfahren? Bestimmen Sie für die m, für die das Verfahren konvergiert, die Konvergenzrate in Abhängigkeit von α.

Sind Ihre Ergebnisse mit Satz 2.7.3 vereinbar?

Hausübung

Aufgabe H1 (Modifizierte Newton-Richtung) (9 Punkte)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^4 - 3x_1^2 + 2 + 2x_2^2$. Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x)$ mit der folgenden Modifikation (siehe auch die Bemerkung nach Algorithmus 7 im Skript): Falls die Hessematrix $\nabla^2 f(x_k)$ nicht positiv definit ist, so soll anstelle der klassichen Newton-Richtung die modifizierte Newton-Richtung

$$s_k := -(\nabla^2 f(x_k) + \mu_k I)^{-1} \nabla f(x_k)$$

verwendet werden, wobei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Hierbei soll μ_k so gewählt werden, dass die Matrix $\nabla^2 f(x_k) + \mu_k I$ positiv definit ist, was durch die Wahl

$$\mu_k \geq \mu + \max\{0, -\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x_k))\},$$

mit einer Konstante $\mu > 0$ erreicht werden soll.

(a) Zeigen Sie zunächst allgemein für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dass die Wahl für μ_k in der Tat erreicht, dass $\nabla^2 f(x_k) + \mu_k I$ positiv definit ist, wenn $\nabla^2 f(x_k)$ selbst nicht positiv definit ist.

(b) Zurück zur oben angegebenen Funktion: Berechnen Sie die ersten beiden Schritte dieses Verfahrens mit dem Startpunkt $x_0 = (1/2, 1)^T$. Verwenden Sie dabei zur Wahl von μ_k die Konstante $\mu = 1$, und bestimmen Sie die Schrittweiten nach der Armijo-Regel mit den Parametern $\gamma = 1/4$ und $\beta = 1/2$.

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien von f. Zeichnen Sie im Startpunkt x_0 die klassische Newton-Richtung, den (normierten) negativen Gradienten und die Richtungen aus Aufgabenteil (a), sowie die berechneten Iterationspunkte ein.

Aufgabe H2 (Konvergenzgeschwindigkeit) (5 Punkte)
Betrachten Sie das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x) = |x|^p$ mit $p > 1$ und Startpunkt $x_0 \neq 0$.

(a) Differenzieren Sie die Funktion f so oft wie nötig für das Newton-Verfahren und schreiben Sie die Ableitung mithilfe der Vorzeichenfunktion geschlossen für alle $x \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich der Ableitung auf.

(b) Sei zunächst $p > 2$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren Q-linear gegen das globale Minimum $\bar{x} = 0$ konvergiert und bestimmen Sie die Konvergenzrate. Zeigen Sie insbesondere, dass die Konvergenz nicht Q-superlinear ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum lokalen Konvergenzsatz der Vorlesung?

(c) Wieso wurde in Teilaufgabe (a) der Fall $p = 2$ ausgeschlossen?

(d) Untersuchen Sie nun den Fall $p \in (1, 2)$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren auch für $p \in (3/2, 2)$ linear gegen 0 konvergiert. Was passiert im Fall $p = 3/2$?

Aufgabe H3 (Vorbereitung auf Rechnerpraktikum) (0 Punkte)
Bereiten Sie sich auf das Rechnerpraktikum nächste Woche vor. Wiederholen Sie dazu die Powell-Wolfe Schrittweite und vor allem deren Berechnung. Gehen Sie auch die Schritte des globalisierten Newton-Verfahrens durch. Ausserdem möchte die Visualisierung des Gradientenverfahrens noch fertig programmiert werden, damit Sie Ihrem Übungsleiter nächste Woche schicke Bilder Ihrer Iterationen zeigen können.
Bearbeiten Sie, falls Ihnen sonst langweilig wird, Aufgabe G3 ausführlich.