Nichtlineare Optimierung
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Hannes Meinlschmidt

WS 2011-2012
21.10.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Landau-Notation)
In der Vorlesung wurden die Landau-Symbole folgendermaßen definiert: Für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt

$$g(s) = O(\|s\|^k) \text{ für } s \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup_{s\to 0} \frac{\|g(s)\|}{\|s\|^k} < \infty,$$

bzw.

$$g(s) = o(\|s\|^k) \text{ für } s \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s\to 0} \frac{\|g(s)\|}{\|s\|^k} = 0.$$

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, jeweils für $s \in \mathbb{R}$ und $s \to 0$:
   i. $s = O(\|s\|^2)$,
   ii. $s^2 = o(\|s\|)$,
   iii. $\sin(s) = O(\|s\|)$,
   iv. $1 = o(\|s\|)$.

(b) Wie lässt sich $g = O(\|s\|^k)$ bzw. $g = o(\|s\|^k)$ für $s \to 0$ anschaulich in Bezug auf Wachstum der Funktion g interpretieren? Könnte man auch etwas anderes als $s \to 0$ betrachten?

(c) Diskutieren Sie die Schreibweise $g(s) = O(\|s\|^k)$ und formulieren Sie sie mathematisch exakter. Welche Falle entsteht durch das Gleichheitszeichen in der Definition der Landau-Symbole (Stichwort Transitivität)? Betrachten Sie ausserdem die Definition der Ableitung bzw. die erste Taylorentwicklung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also

$$f(x+s) = f(x) + \nabla f(x)^T s + o(\|s\|).$$

Für welche Art von Objekt steht $o(\|s\|)$ hier und wie ist die Gleichung im Hinblick darauf zu verstehen?

(d) Gilt für Funktionen f, g mit $f(s) = O(\|s\|^k)$ und $g(s) = O(\|s\|^k)$ auch $(f+g)(s) = O(\|s\|^k)$, bzw. für Funktionen f, g mit $f(s) = o(\|s\|^k)$ und $g(s) = o(\|s\|^k)$ auch $(f+g)(s) = o(\|s\|^k)$? Was lässt sich über die Funktion cf mit $c \in \mathbb{R}$ aussagen?

Aufgabe G2 (Konvexe Funktionen)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $g : K \to I$ (streng) konvex und $f : I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton wachsend und konvex. Zeigen Sie, dass die Komposition

$$f \circ g : K \to \mathbb{R}$$

(streng) konvex ist.

Aufgabe G3 (Kompaktheit der Niveaumenge)
Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ und beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $N_f(w)$ kompakt ist.
Bemerkung. Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ heißen auch *koerzitiv* oder *radial unbeschränkt*.

Aufgabe G4 (Taylorentwicklung)
Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1+x_2)},$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Ist die Funktion (streng) konvex, (streng) konkav oder weder konvex noch konkav?

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexität und Extremwerte) (5 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen gelten:

(a) Jedes lokale Minimum von f auf K ist auch globales Minimum von f. Gilt die Aussage auch für Maxima, ist also jedes lokale Maximum von f auf K auch ein globales?

(b) Die Menge der Minimalpunkte von f auf K, also

$$\operatorname{argmin}(f,K) = \{x \in K : f(x) \leq f(y) \text{ für alle } y \in K\},$$

ist konvex.

(c) Ist f sogar streng konvex, so hat f höchstens ein lokales Minimum, was dann auch das einzige globale Minimum ist. Nennen Sie eine streng konvexe Funktion auf einer konvexen Menge, die kein Minimum annimmt.

(d) Seien $c_1, \dots, c_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ affin-linear. Dann ist die Menge

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) \leq 0 \text{ und } h(x) = 0\}$$

konvex, wobei $c(x) = (c_1(x), \dots, c_m(x))^T$ und $c(x) \leq 0$ genau dann, wenn $c_i(x) \leq 0$ für $i = 1, \dots, m$.

Aufgabe H2 (Differenzieren im Mehrdimensionalen) (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folgende Produktregel gilt:

$$\nabla(F(x)^T G(x)) = F'(x)^T G(x) + G'(x)^T F(x).$$

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

mit $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch.

(c) Zeigen Sie, dass f, wie in Aufgabenteil (b) gegeben, streng konvex ist, wenn A positiv definit ist.
Tipp: Hier ist kein Kampfrechnen nötig.

(d) Sei f wieder wie in Aufgabenteil (b). Geben Sie die Taylorentwicklung zweiten Grades von f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ an. Wie exakt ist diese?

Aufgabe H3 (Unrestringierte Optimierung quadratischer Funktionen) (4 Punkte)
Schreiben Sie die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 3$$

in der allgemeinen Form $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$ mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ist A positiv definit? Finden Sie das globale Minimum von f.