Topologische Gruppen
7. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
31.01.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Projektiver Limes)
Sei $\mathscr{P} = \{f_{jk}\colon G_k \to G_j\}$ ein projektives System topologischer Gruppen mit Grenzmorphismen $f_j\colon \lim_{\leftarrow} G_j = G \to G_j$. Ein **Kegel** über $\mathscr{P}$ ist eine topologische Gruppe C mit einem kommutierenden Diagramm von Morphismen $\gamma_j\colon C \to G_j$ topologischer Gruppen, so dass $j \le k$ die Gleichung $\gamma_j = f_{jk} \circ \gamma_k$ impliziert.

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dll, "\gamma_j"'] \arrow[drr, "\gamma_k"] & & \\
 & & G = \lim_{\leftarrow} G_j \arrow[dl, "f_j"] \arrow[dr, "f_k"'] & & \\
\cdots & G_j \arrow[l] & & G_k \arrow[ll, "f_{jk}"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie (bzw. besser: Machen Sie sich klar, dass ...): Die Gruppe G mit den Grenzmorphismen $f_j\colon G \to G_j$ ist ein Kegel über $\mathscr{P}$.

(b) Weisen Sie nach, dass man mit $C := \{1\}$ und den offensichtlichen Morphismen γ_j ebenfalls einen Kegel erhält.

(c) Beweisen Sie die folgende universelle Eigenschaft des projektiven Limes: Ist $\{\gamma_j\colon C \to G_j\}$ ein Kegel über $\mathscr{P}$, so existiert ein eindeutiger Morphismus $\gamma\colon C \to G = \lim_{\leftarrow} G_j$ mit $\gamma_j = f_j \circ \gamma$.

Aufgabe G2 (Kompakte Lie-Gruppen)
Zeigen Sie:

(a) Jede endliche Gruppe ist eine kompakte Lie-Gruppe.

(b) Ein endliches direktes Produkt kompakter Lie-Gruppen ist eine kompakte Lie-Gruppe.

(c) Eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten Lie-Gruppe ist eine kompakte Lie-Gruppe.

Aufgabe G3 (Dividierbarkeit)
Sei A abelsche Gruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) A ist dividierbar.

(b) Für jedes $a \in A$ existiert ein Homomorphismus $f : \mathbb{Q} \to A$ mit $f(1) = a$.

Aufgabe G4 (Dualität)
Versuchen Sie sich an folgender Aussage: Ist $f : A \to B$ ein Morphismus, so kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & \hat{\hat{A}} \arrow[d, "\hat{\hat{f}}"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"'] & \hat{\hat{B}}
\end{tikzcd}$$