

Topologische Gruppen

7. Übungsblatt



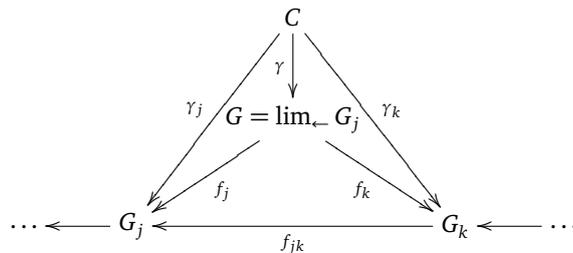
Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
31.01.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Projektiver Limes)

Sei $\mathcal{P} = \{f_{jk}: G_k \rightarrow G_j\}$ ein projektives System topologischer Gruppen mit Grenzmorphismen $f_j: \lim_{\leftarrow} G_j = G \rightarrow G_j$. Ein **Kegel** über \mathcal{P} ist eine topologische Gruppe C mit einem kommutierenden Diagramm von Morphismen $\gamma_j: C \rightarrow G_j$ topologischer Gruppen, so dass $j \leq k$ die Gleichung $\gamma_j = f_{jk} \circ \gamma_k$ impliziert.



- Zeigen Sie (bzw. besser: Machen Sie sich klar, dass ...): Die Gruppe G mit den Grenzmorphismen $f_j: G \rightarrow G_j$ ist ein Kegel über \mathcal{P} .
- Weisen Sie nach, dass man mit $C := \{1\}$ und den offensichtlichen Morphismen γ_j ebenfalls einen Kegel erhält.
- Beweisen Sie die folgende universelle Eigenschaft des projektiven Limes: Ist $\{\gamma_j: C \rightarrow G_j\}$ ein Kegel über \mathcal{P} , so existiert ein eindeutiger Morphismus $\gamma: C \rightarrow G = \lim_{\leftarrow} G_j$ mit $\gamma_j = f_j \circ \gamma$.

Aufgabe G2 (Kompakte Lie-Gruppen)

Zeigen Sie:

- Jede endliche Gruppe ist eine kompakte Lie-Gruppe.
- Ein endliches direktes Produkt kompakter Lie-Gruppen ist eine kompakte Lie-Gruppe.
- Eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten Lie-Gruppe ist eine kompakte Lie-Gruppe.

Aufgabe G3 (Dividierbarkeit)

Sei A abelsche Gruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

- A ist dividierbar.
- Für jedes $a \in A$ existiert ein Homomorphismus $f: \mathbb{Q} \rightarrow A$ mit $f(1) = a$.

Aufgabe G4 (Dualität)

Versuchen Sie sich an folgender Aussage: Ist $f: A \rightarrow B$ ein Morphismus, so kommutiert das folgende Diagramm.

