

# Topologische Gruppen

## 7. Übungsblatt



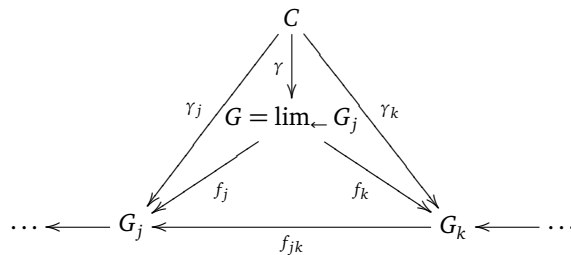
Fachbereich Mathematik  
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012  
31.01.2012

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1 (Projektiver Limes)

Sei  $\mathcal{P} = \{f_{jk}: G_k \rightarrow G_j\}$  ein projektives System topologischer Gruppen mit Grenzmorphismen  $f_j: \lim_{\leftarrow} G_j = G \rightarrow G_j$ . Ein **Kegel** über  $\mathcal{P}$  ist eine topologische Gruppe  $C$  mit einem kommutierenden Diagramm von Morphismen  $\gamma_j: C \rightarrow G_j$  topologischer Gruppen, so dass  $j \leq k$  die Gleichung  $\gamma_j = f_{jk} \circ \gamma_k$  impliziert.



- Zeigen Sie (bzw. besser: Machen Sie sich klar, dass ...): Die Gruppe  $G$  mit den Grenzmorphismen  $f_j: G \rightarrow G_j$  ist ein Kegel über  $\mathcal{P}$ .
- Weisen Sie nach, dass man mit  $C := \{1\}$  und den offensichtlichen Morphismen  $\gamma_j$  ebenfalls einen Kegel erhält.
- Beweisen Sie die folgende universelle Eigenschaft des projektiven Limes: Ist  $\{\gamma_j: C \rightarrow G_j\}$  ein Kegel über  $\mathcal{P}$ , so existiert ein eindeutiger Morphismus  $\gamma: C \rightarrow G = \lim_{\leftarrow} G_j$  mit  $\gamma_j = f_j \circ \gamma$ .

#### Aufgabe G2 (Kompakte Lie-Gruppen)

Zeigen Sie:

- Jede endliche Gruppe ist eine kompakte Lie-Gruppe.
- Ein endliches direktes Produkt kompakter Lie-Gruppen ist eine kompakte Lie-Gruppe.
- Eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten Lie-Gruppe ist eine kompakte Lie-Gruppe.

#### Aufgabe G3 (Dividierbarkeit)

Sei  $A$  abelsche Gruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

- $A$  ist dividierbar.
- Für jedes  $a \in A$  existiert ein Homomorphismus  $f: \mathbb{Q} \rightarrow A$  mit  $f(1) = a$ .

#### Aufgabe G4 (Dualität)

Versuchen Sie sich an folgender Aussage: Ist  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus, so kommutiert das folgende Diagramm.

