Topologische Gruppen
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
17.01.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Integrale)
Sei G kompakte abelsche Gruppe, $\chi \in \hat{G}$ ein nicht-trivialer Charakter und sei μ das Haar-Maß von G. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{G}} \chi(g) d\mu(g) = 0.$$

Was ist der Wert von $\int_G \chi(g) d\mu(g)$, falls χ trivial ist?

Aufgabe G2 (Dividierbarkeit)
Sei $\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}$ die additive Untergruppe von $\mathbb{Q}$, bestehend aus allen Elementen der Form $\frac{m}{p^n}$, wobei $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Definiere nun $\mathbb{Z}(p^\infty) := \frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}(p^\infty) := \frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ ist dividierbar.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathbb{Z}(p^\infty)$ von Ordnung p^m für ein m ist. Zeigen Sie dann, dass die Gleichung $p^k x = g$ in $\mathbb{Z}(p^\infty)$ für alle $g \in G$ lösbar ist. Zeigen Sie schließlich, dass in einer endlichen abelschen Gruppe der Ordnung m zu jedem n mit $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$ die Gleichung $nx = g$ lösbar ist. Warum sind Sie nun fertig?

Definition: Für p prim heißt $\mathbb{Z}(p^\infty)$ **Prüfer-Gruppe**.

Aufgabe G3 (Mehr Hüte)
Sei $\varphi : A \to B$ ein Morphismus. Dann ist der Morphismus $\hat{\varphi} : \hat{B} \to \hat{A}$ gegeben durch $\hat{\varphi}(\chi) = \chi \circ \varphi$.

Zeigen Sie: Für jeden Morphismus $f : A \to \hat{G}$ existiert ein Morphismus $f' : G \to \hat{A}$ mit der Eigenschaft $f = \hat{f}' \circ \eta_A$.

Hinweis: Definieren Sie $f'(g)(a) := f(a)(g)$ und wenden Sie die Definitionen an.

Für jeden Morphismus $f : G \to \hat{A}$ existiert ein Morphismus $f' : A \to \hat{G}$ mit der Eigenschaft $f = \hat{f}' \circ \eta_G$

Hausübung

Aufgabe H1 (Neulich im Hutladen...)
Ist A abelsche Gruppe, dann gilt $\hat{\eta_A} \circ \eta_{\hat{A}} = \mathrm{id}_{\hat{A}}$ und für eine kompakte abelsche Gruppe G gilt $\hat{\eta_G} \circ \eta_{\hat{G}} = \mathrm{id}_{\hat{G}}$

Aufgabe H2 (Und nochmal Hüte)
Ist A abelsch und η_A ein Isomorphismus, dann ist $\eta_{\hat{A}}$ ein Isomorphismus. Ist G kompakt abelsch und η_G ein Isomorphismus, dann ist $\eta_{\hat{G}}$ ein Isomorphismus.