Topologische Gruppen
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
20.12.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Warmwerden)
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $\phi \mapsto \int_0^1 \phi(x)dx$ ist ein Haar-Integral auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe G2 (Unimodularität)
Sei G die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass G nicht unimodular ist.
Hinweis: Was passiert bei Konjugation?

Zeigen Sie: Jede diskrete Gruppe ist unimodular (vgl. Satz 4.22 (iv)).
Hinweis: Wie sieht das Haar-Maß auf einer diskreten Gruppe aus?

Aufgabe G3 (Anwendung des Haar-Integrals)
Sei G lokalkompakt und λ ein Haar-Integral auf G. Wir betrachten hier den Raum $C_c^{\mathbb{C}}(G) := \{\varphi + i\psi \mid \varphi, \psi \in C_c(G)\}$ und die natürliche Erweiterung von λ darauf. Zeigen Sie:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : C_c^{\mathbb{C}}(G) \times C_c^{\mathbb{C}}(G) &\to \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \lambda(\varphi\overline{\psi}) \end{aligned}$$

ist ein unitäres Skalarprodukt auf dem Raum $C_c^{\mathbb{C}}(G)$ und die Transformation $\varphi \mapsto \varphi_g$ ist eine unitäre Transformation für jedes $g \in G$.

Also ist die Vervollständigung des Raumes $(C_c^{\mathbb{C}}(G), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und G erlaubt eine unitäre Darstellung auf diesem Raum.

Aufgabe G4 (Charaktergruppen)
Berechnen Sie die Charaktergruppe von $\mathbb{T}$.

Frohe Weihnachten!