Topologische Gruppen
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
06.12.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lebesgue-Maß)
Zeigen Sie: Das Lebesgue-Maß des $\mathbb{R}^n$ ist ein Haar-Maß.

Aufgabe G2 (Etwas Gruppentheorie)
Sei G eine Gruppe, A eine abelsche Gruppe und sei $f : G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: $[G, G] \leq \ker(f)$.

Schließen Sie: Sind G, A topologische Gruppen, A Hausdorff und f stetig, dann gilt sogar $\overline{[G, G]} \leq \ker(f)$.

Aufgabe G3 (Lokalkompakte Gruppen)
Beweisen oder widerlegen Sie: Das direkte Produkt einer Familie von lokalkompakten Gruppen ist lokalkompakt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Haar-Maße)
Sei G eine endliche Hausdorff-Gruppe (daher insbesondere diskret). Finden Sie ein Haar-Maß auf G!

Was ändert sich, wenn man G lediglich diskret annimmt (z.B. $G = \mathbb{Z}$)?

Aufgabe H2 (Existenz von Funktionen)
Sei G lokalkompakt und Hausdorff. Zeigen Sie: Für $U \in \mathfrak{U}$ existiert eine Funktion $0 \neq \varphi \in C_c^+(G)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jede lokalkompakte Hausdorff-Gruppe $T_{3\frac{1}{2}}$ ist, d.h. dass ein Punkt und eine abgeschlossene Menge durch eine stetige Funktion getrennt werden können (Schauen Sie hierzu am Besten einmal in das Skript von K. H. Hofmann aus dem WS 2005/06). Benutzen Sie dies mit einem geeigneten Punkt und einer geeigneten abgeschlossenen Menge der Gruppe G.