Topologische Gruppen
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
22.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Sätze der Offenen Abbildung)
Sei τ_{disc} die diskrete und τ die gewöhnliche Topologie auf $\mathbb{R}$. Die Abbildung $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \tau_{disc}) \to (\mathbb{R}, \tau)$ ist nicht offen. Warum sind die Sätze der Offenen Abbildung nicht anwendbar?

Aufgabe G2 (Morphismen)
Zeigen Sie: Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ ist stetig und offen genau dann wenn $f(\mathfrak{U}_G) = \mathfrak{U}_H$.

Aufgabe G3 (Total unzusammenhängende Untergruppen)
Sei G eine zusammenhängende Gruppe und sei H ein total unzusammenhängender Normalteiler von G. Zeigen Sie: $H \leq Z(G)$, d.h. jedes Element aus H ist zentral.

Aufgabe G4 (Zusammenhängende Gruppen)
Sei G zusammenhängende Gruppe und sei $U \in \mathfrak{U}$ eine Eins-Umgebung. Beweisen oder widerlegen sie: $G = \langle U \rangle$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lokalkompakte Gruppen)
Sei G lokalkompakt und zusammenhängend. Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert eine kompakte Eins-Umgebung $K \subseteq G$ mit $G = \langle K \rangle$.

Aufgabe H2 (Offene Untergruppe)
Sei G topologische Gruppe. Zeigen Sie: Eine Untergruppe $H \leq G$ ist offen genau dann wenn sie einen inneren Punkt enthält genau dann wenn sie abgeschloffen ist.

Aufgabe H3 (Vektorräume)
Sei V ein reeller Vektorraum mit zwei Normen $||.||_1$ und $||.||_2$, sodass V bezüglich beider Normen vollständig ist. Nehmen wir an, es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $||x||_1 \leq c||x||_2$ für alle $x \in V$. Dann induzieren beide Normen die gleiche Topologie auf V.