Topologische Gruppen
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
08.11.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Eigenschaften)
Sei G eine topologische Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Für jede Eins-Umgebung $U \in \mathfrak{U}$ existiert eine (offene) Eins-Umgebung V mit den Eigenschaften:

$$VV \subseteq U, \quad V^{-1}V \subseteq U, \quad VV^{-1} \subseteq U, \quad V^{-1}V^{-1} \subseteq U.$$

(b) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Beweisen Sie, dass die Quotientenabbildung $q\colon G \to G/H$ offen ist.

(c) Die Multiplikation $\mu_G\colon G \times G \to G$ ist offen.

(d) Sei $Y \subseteq G$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist $\overline{Y}$ ebenfalls zusammenhängend. (NB: Dies ist allgemein in der Kategorie der topologischen Räume wahr.)

Aufgabe G2 (Der Umgebungsfilter der Eins)

(a) Finden Sie ein Beispiel einer topologischen Gruppe G und zwei abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq G$, so dass $AB \subseteq G$ nicht abgeschlossen ist (vgl. Proposition 2.12 (ii)).

(b) Beweisen Sie Korollar 2.16: Sei G topologische Gruppe und H eine Hausdorff-Gruppe. Dann existiert für jeden Morphismus von topologischen Gruppen $f : G \to H$ ein eindeutiger Morphismus $f'\colon G/\overline{\{1\}} \to H$ mit der Eigenschaft $f = f' \circ q$, wobei $q\colon G \to G/\overline{\{1\}}$ der Quotientenmorphismus ist.

Aufgabe G3 (Abgeschlossene Mengen)
Sei $f : G \to H$ ein Morphismus und H Hausdorff. Dann ist der Graph $X := \{(x, y) \in G \times H \mid f(x) = y\}$ von f abgeschlossen in $G \times H$.

Benutzen Sie dies, um Folgendes zu zeigen: Seien X_n eine Familie von Hausdorffschen topologischen Gruppen und $f_n\colon X_{n+1} \to X_n$ stetige Morphismen. Dann ist die Menge $\{(x_n) \mid (\forall n \in \mathbb{N})\colon f_n(x_{n+1}) = x_n\}$ eine abgeschlossene Menge von $\prod X_n$.

Aufgabe G4 (Zerlegung von Morphismen)
Beweisen Sie Proposition 2.10 aus der Vorlesung (kanonische Zerlegung von Morphismen topologischer Gruppen).

Hausübung

Aufgabe H1 (Ein abgeschloffener Schnitt)
Beweisen Sie Lemma 2.19 aus der Vorlesung.

Aufgabe H2 (Charakteristische Gruppen)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $N \lhd G$ ein Normalteiler einer Gruppe G. Dann ist N charakteristisch.

(b) Ist G abelsch (d.h. insbesondere, dass jede Untergruppe normal ist), dann ist jede Untergruppe charakteristisch.

Aufgabe H3 (Konstruktion von Topologien)
Falls Ihnen Satz 2.22 unbekannt oder fremd vorkommt, dann beweisen Sie ihn.