Topologische Gruppen
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Andreas Mars

WS 2011/2012
25.10.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Homogene Räume)

(a) Zeigen Sie: Das offene Intervall $(0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist homogen.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Das kompakte Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist homogen.

Aufgabe G2 (Topologische Gruppen)

(a) Beweisen Sie: Die Matrixgruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, ausgestattet mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ sind topologische Gruppen.

(b) Beweisen Sie, dass alle Gruppen aus (a) abgeschlossene Untergruppen der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind.

(c) Beweisen Sie, dass für $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ offen in $\mathbb{F}^{n\times n}$ ist, während $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ in $\mathbb{F}^{n\times n}$ abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie: Eine Gruppe G mit einer Topologie τ auf G ist eine topologische Gruppe genau dann, wenn die Abbildung

$$G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto gh^{-1}$$

stetig bzgl. τ ist.

(e) Sei $H \leq G$ eine offene Untergruppe. Beweisen oder widerlegen Sie: H ist eine abgeschlossene Untergruppe.

Aufgabe G3 (Untergruppen und Quotienten)

Zeigen Sie:

(a) Sei $H \leq G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe G. Dann ist die Abbildung

$$(g, g'H) \mapsto gg'H$$

stetig im zweiten Argument.

(b) Der Quotient G/H ist Hausdorffsch genau dann, wenn H abgeschlossen ist. Unter welchen Bedingungen an H ist der Quotient G/H selbst eine topologische Gruppe?

Aufgabe G4 (Topologische Mannigfaltigkeiten)

Zeigen Sie Proposition 1.6 aus der Vorlesung: Eine zusammenhängende Hausdorffsche topologische Mannigfaltigkeit X ist homogen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass für je zwei Punkte x, y in der offenen Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus der abgeschlossenen Einheitskugel existiert, der x auf y abbildet und den Rand der Kugel punktweise festhält.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x eine offene Umgebung V von x mit $\overline{V} \subseteq U$ und folgender Eigenschaft exitiert: Es gibt für alle $v \in V$ einen Homöomorphismus $f : V \to V$ mit $f(x) = v$, der sich auf ganz X fortsetzen lässt.

(c) Für beliebige $x, y \in X$ gibt es eine kompakte 'Strecke', die sie verbindet. Warum liefert uns (ii) nun das Gewünschte?

Hausübung

Aufgabe H1 (Nochmal topologische Gruppen)
Zeigen Sie:

(a) Der Torus $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der gewöhnlichen komplexen Multiplikation sowie der Teilraumtopologie von $\mathbb{C}$ ist eine topologische Gruppe.

(b) Der Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist mit der Operation $(x, y) \mapsto x + y (\mathrm{mod} 1)$ eine topologische Gruppe.

(c) Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}, x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, und sie ist stetig, bijektiv und offen.

Aufgabe H2 (Konstruktion von topologischen Gruppen)
Beweisen Sie Proposition 2.6 aus der Vorlesung:

(a) Ist $H \leq G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe, dann ist H eine topologische Gruppe mit der Teilraumtopologie.

(b) Sei $\{G_i\}_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Gruppen. Dann ist $\prod_{i\in I} G_i$ eine topologische Gruppe mit der Produkttopologie.

(c) Ist $N \lhd G$ Normalteiler einer topologischen Gruppe, dann ist G/N mit der Quotiententopologie eine topologische Gruppe. Sie ist T_2 genau dann wenn $N = \overline{N}$.

Aufgabe H3 (Ein Quotient)
Wir betrachten die additive Gruppe $\mathbb{R}$, ausgestattet mit der gewöhnlichen Topologie und $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Teilraumtopologie. Da $\mathbb{R}$ abelsch ist, ist $\mathbb{Q}$ eine normale Untergruppe und wir können die Gruppe $G := \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ betrachten.

(a) G ist eine topologische Gruppe. Ist sie Hausdorff, T_1 und/oder T_0?

(b) Zeigen Sie: die Gruppe $\{1\}$ liegt dicht in G.
Hinweis: Vergleichen Sie $G/\overline{\{1\}}$ mit der Gruppe $\mathbb{R}/\overline{\mathbb{Q}}$. Was fällt Ihnen auf?