3. ÜBUNGSBLATT: AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER DISKRETEN OPTIMIERUNG

1. Beispiele für Matroide

Untersuche, welche der folgenden Unabhängigkeitssysteme Matroide sind. Nimm dabei als Definition eine der beiden folgenden Bedingungen:

- Alle Basen sind gleichmächtig.
- Zu je zwei unabhängigen Mengen I und J mit $|I| < |J|$ gibt es ein $e \in E$, so dass $I \cup \{e\}$ wieder unabhängig ist.

Erkläre, was die anderen Begriffe in diesem Kontext bedeuten.

(1) Sei E eine endliche Menge und $k \in \mathbb{N}$, dann ist eine Menge $I \subseteq E$ unabhängig, wenn $|I| \leq k$ gilt.
(2) Sei G ein ungerichteter Graph und $E = EG$ die Kantenmenge, dann ist eine Teilmenge $I \subseteq E$ unabhängig, wenn GI kreisfrei ist.
(3) Sei G ein ungerichteter Graph und $E = EG$ die Kantenmenge von G, dann ist eine Teilmenge $I \subseteq E$ unabhängig, wenn I eine (knoten)disjunkte Vereinigung von Wegen in G ist.
(4) Sei G ein bipartiter Graph mit Partition $VG = U \cup W$. Dann ist eine Menge $I \subseteq U$ unabhängig, wenn es ein Matching M mit $MU = I$ gibt.
(5) Sei $A \in \{0,1\}^{m \times |E|}$ eine Matrix. Dann ist eine Menge $I \subseteq E$ unabhängig, wenn $A\chi_I \leq \mathbf{1}$ gilt.

2. Schnitt von Matroiden

Konstruiere drei Matroide so, dass der Schnitt ihrer Independent-Set-Polytope eine nicht-ganzzahlige Ecke hat.

3. Duale Reduktion

Man kann eine Primallösung auch benutzen, um die Schranken von Variablen zu verbessern.

Dazu benutzen wir die reduzierten Kosten der Variablen. Sei $\overline{x}$ eine optimale LP-Lösung und z eine zulässige IP-Lösung. Wie kann man mit Hilfe der reduzierten Kosten eine neue Schranke für die Variablen herleiten?

Als Anwendung löse nun das untenstehende IP (aus der 0. Übung), für das die Optimallösung der LP-Relaxierung $(1,0,0,0,1,\frac{13}{14})$ ist.

$$\begin{array}{lll}
\max & 43x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 12x_4 + 36x_5 + 22x_6 & \\
& 12x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 & \leq 20 \\
& 3x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 13x_4 + 20x_5 + 14x_6 & \leq 36 \\
& x \in \{0,1\}^6 &
\end{array}$$