2. ÜBUNGSBLATT: AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER DISKRETEN OPTIMIERUNG

1. Reste aus der Vorlesung

Zeige die Aussagen 2 und 3 von Satz 2.1 aus der Vorlesung.

Hinweis: Für 2 benutze eine andere Aufteilung von $\overline{x}-\overline{z}$. Für 3 benutze z anstelle von $\overline{x}$ im allgemeinen Teil. Welches Argument aus dem allgemeinen Teil ist dann nicht mehr richtig? Konstruiere dann aus der Zerlegung von $z-\overline{z}$ einen Verbesserungsvektor.

2. Hadamard-Ungleichung

Zeige zunächst folgende Ungleichung, die Hadamard-Ungleichung:

$$|\det A| \leq \prod_{i=1}^{d} \|A_{\cdot,i}\|_2$$

Konstuiere für festes d eine 0/1- oder eine ± 1-Matrix, die möglichst große Determinante hat. Kannst Du konkrete d angeben, bei denen für diese Matrizen die Hadamard-Schranke scharf ist?

Hinweis: Für den ersten Teil zeige zunächst das Resultat für obere Dreiecksmatrizen und nutze dann die QR-Zerlegung. Beim zweiten kann man mal rumprobieren.

3. Würfel und Würfelhyperebenen

Wieviele 2-dimensionale 0/1-Polytope gibt es bis auf 0/1-Äquivalenz, wieviele bis auf affine Äquivalenz? Zwei Polytope P und Q heißen 0/1-äquivalent, wenn es eine Würfelsymmetrie gibt, die P auf Q abbildet. Sie heißen affin äquivalent, wenn es eine affine Transformation gibt, die P auf Q abbildet.

Wie sieht es in Dimension 3 aus? Kannst Du ein Beispiel finden, wo 0/1-Äquivalenz und affine Äquivalenz auseinanderfallen?

Sei $C_d = [-1,1]^d$ der d-dimensionale ± 1-Würfel. Wir sagen, dass $H = \left\{x : a^\top x = b\right\}$ eine Würfelhyperebene ist, wenn es mindestens d affin unabhängige Punkte aus $\left\{\pm 1\right\}^d$in H gibt. Anders gesagt, es gibt d Ecken des Würfels, die die Hyperebene aufspannen.

Was ist der größte Koeffizient der in a und b auftreten kann, wenn man fordert, dass die Einträge von a ganzzahlig und teilerfremd sein sollen? Bestimme diesen Wert für kleine Dimensionen (sagen wir bis $d = 4$).