1. ÜBUNGSBLATT: AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER DISKRETEN OPTIMIERUNG

1. Berechnung eines Covers

Für eine Knapsackmenge wie im Skript gegeben und eine LP-Lösung x^* wird das folgende IP verwendet, um ein Cover zu berechnen

$$\begin{array}{llr} \min & \sum_{i\in I}(1-x_i^*)\, z_i & \\ & \sum_{i\in I} a_i z_i & \geq b+1 \\ & z \in \{0,1\}^I . & \end{array} \tag{1}$$

Hierbei ist z der Vektor der Indikatorvariablen für das Cover. Woran erkennen wir mit obigem IP, dass wir ein Cover gefunden haben? Formuliere dann ein equivalentes IP, welches wieder ein Knapsack in Standardform ist.

2. Beispiele für Cover

Sei $K = \left\{x \in \{0,1\}^6 : 40x_1 + 40x_2 + 35x_3 + 35x_4 + 15x_5 + 15x_6 \leq 100\right\}$.

Finde gute Ungleichungen, um die folgenden Punkte von der LP-Relaxierung von K abzuschneiden.

(1) $x^a = \left(1\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\right)$
(2) $x^b = \left(\tfrac{1}{3}\ 1\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ 1\right)$

3. Lifting

Betrachte Lemma 1.5 im Skript und dessen Beweis. Versuche nun Lemma 1.6 zu beweisen, entweder in dem Du den Beweis von Lemma 1.5 nachbaust oder in dem Du überlegst, was passiert, wenn Du $\overline{x}_k$ liftest.

Zeige am Beispiel aus der Vorlesung, dass es beim sequentiellen Liften (also das, was wir hier machen), auf die Reihenfolge ankommt, indem Du zuerst x_6 und dann x_5 liftest.

4. Flow-Cover

Betrachte die Menge

$$T = \left\{ x \in \{0,1\}^I, y \in \mathbb{R}_+^I : \sum_{i\in I} y_i \leq b, y_i \leq a_i x_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wir nennen eine Teilmenge $C \subseteq I$ ein (Flow-)Cover, wenn $\sum_{i\in C} a_i > b$ gilt. Setze nun $\Delta = b - \sum_{i\in C} a_i$. Zeige, dass dann

$$\sum_{i\in C} y_i \leq b - \sum_{i\in C} \max\{0, a_i - \Delta\}\overline{x}_i$$

eine gültige Ungleichung für T ist.

Zusatzaufgabe: Zeige, dass wir so eine Facette von T erhalten, wenn $\Delta < \max_{i\in C} a_i$ gilt.