

0. ÜBUNGSBLATT: AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER DISKRETEN OPTIMIERUNG

1. LINEARE PROGRAMME

1.1. **Verifikation.** Zeige, dass $(39, 0, 48, 30)^\top$ Optimallösung des folgenden LPs ist:

$$\begin{array}{rccccrcr} \max & 19x_1 & +13x_2 & +12x_3 & +17x_4 & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq & 225 \\ & 4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \leq & 420 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq & 117 \\ 0 \leq & x & & & & & \end{array}$$

1.2. **Dualisieren.** Das untenstehende LP ist eine typische Formulierung des Problem einen kürzesten Weg zwischen zwei Knoten s und t in einem gerichteten Graphen G zu finden, wenn das Benutzen jedes Bogens 1 kostet. Die Variablen x_{vw} geben an, ob der Bogen vw Teil des kürzesten Wegs ist oder nicht.

$$\begin{array}{rcc} \min & & \sum_v \sum_w x_{vw} \\ \forall v \in V(G) \setminus \{s, t\}. & \sum_v x_{sv} & = 1 \\ & \sum_{w:(v,w) \in A(G)} x_{vw} - \sum_{w:(w,v) \in A(G)} x_{wv} & = 0 \\ & 0 \leq x & \end{array}$$

Stelle das duale LP hierzu auf und versuche das duale LP als Optimierungsproblem über dem Ausgangsgraphen zu formulieren. Kannst Du Deine Interpretation auf den Fall verallgemeinern, dass die Kanten nicht mit Einheits-, sondern nicht-negativen ganzzahligen Kosten belegt sind.

2. KOMBINATORISCHE OPTIMIERUNG

Versuche Dich an den folgenden kombinatorischen Optimierungsproblemen. Was würdest Du vorschlagen, um die Probleme zu lösen, was kannst Du über die Komplexität sagen? Hier ein paar Fragen zur Anregung: Wie sieht ein (M)IP-Modell für das Problem aus? Wie gut ist es? Gibt es einen guten Algorithmus, der das Problem direkt löst oder zumindest eine zulässige (wenn auch nicht optimale) Lösung liefert? Kannst Du eine gute Relaxierung für das Problem angeben?

2.1. **Losgrößenbestimmung.** Wir wollen die Produktion eines Gutes über T Zeiteinheiten planen. Wir kennen den Bedarf b_t zu jedem Zeitpunkt $t \in \{1, \dots, T\}$. Zu jedem dieser Zeitpunkte können wir uns entscheiden zu produzieren. Dann fallen Fixkosten an und Kosten für jede Einheit von dem Gut, welche wir produzieren. Wir können auch mehr produzieren als Bedarf besteht. Diese Mehrproduktion können wir einlagern. Dabei entstehen pro eingelagerter Einheit Lagerkosten .. Finde einen optimalen Produktionsplan, der den gegebenen Bedarf erfüllt und dabei die anfallenden Kosten minimiert.

Mögliche Erweiterung: Wie ändert sich das Problem, wenn das Lager eine gewisse Maximalkapazität hat?

2.2. Scheduling. Wir haben eine Maschine auf der eine Reihe von n Jobs ausgeführt werden sollen. Dabei hat jede Aufgabe i einen Wert w_i und eine Dauer p_i . Wir versuchen nun die Kosten $\sum_i C_i w_i$ zu minimieren, wobei C_i die Zeit ist, zu der die Aufgabe i fertiggestellt worden ist. Die Maschine kann nur eine Aufgabe gleichzeitig bearbeiten und eine Aufgabe kann nicht unterbrochen werden. Gesucht ist eine Reihenfolge der Jobs, so dass die Anordnungsbedingungen eingehalten werden und die obigen Kosten minimiert werden.

Mögliche Erweiterungen: Zusätzlich ist noch eine Partialordnung auf den Jobs gegeben, die uns sagt, welche Jobs Voraussetzung für die Bearbeitung eines anderen Jobs sind. Was ändert sich?

Wie ändert sich das Problem, wenn wir für jeden Job i noch eine Releasezeit R_i vorsehen, d.h. Job i darf frühestens zum Zeitpunkt R_i bearbeitet werden?

2.3. Standortplanung. Wir betrachten folgendes Standortplanungs-Problem. Wir haben eine Reihe möglicher Standorte $S = \{1, \dots, n\}$ und eine Menge von zu beliefernden Kunden $K = \{1, \dots, m\}$. Jeder Kunde i hat einen gewissen Bedarf b_i ; dieser muss vollständig von genau einem Standort befriedigt werden. Das Einrichten eines Standorts j kostet gewisse Fixkosten f_j und um aus Standort j den Bedarf von Kunden i zu befriedigen werden Kosten c_{ij} fällig.

Mögliche Erweiterung: Wie ändert sich das Problem, wenn von jedem Standort j maximal ein Gesamtbedarf von B_j befriedigt werden kann?

3. VERMISCHTES

3.1. Knapsacks. Betrachten wir ein Knapsack-Problem der üblichen Form:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top x \\ & w^\top x \leq b \\ & x \in \{0, 1\}^d \end{aligned}$$

Unser Ziel ist möglichst schwere Instanzen des Knapsack-Problems zu konstruieren. Dabei ist uns ein d vorgegeben, ebenso sind obere Schranken für die Einträge von w und c gegeben. Mach' einen Vorschlag, wie man schwere Instanzen konstruiert und gib' eine Begründung, warum die Instanzen vermutlich schwer sind.

3.2. Hadamard-Ungleichung. Zeige zunächst folgende Ungleichung, die Hadamard-Ungleichung:

$$|\det A| \leq \prod_{i=1}^d \|A_{\cdot, i}\|_2$$

Konstruiere für festes d eine 0/1- oder eine ± 1 -Matrix, die möglichst große Determinante hat. Kannst Du konkrete d angeben, bei denen für diese Matrizen die Hadamard-Schranke scharf ist?

3.3. Schubfachprinzip. Wir versuchen, m Gegenstände in n Fächer zu legen, wobei keine zwei Gegenstände im gleichen Fach liegen dürfen. Formuliere das Problem als IP mit Binärvariablen x_{ij} , wobei $x_{ij} = 1$ bedeutet, dass Gegenstand i in Fach j liegt. Wie gut lässt sich Deine Formulierung für große m und n lösen?

4. DIVERSE (GEMISCHT-)GANZZAHLIGE PROGRAMME

Finde für die folgenden Probleme eine Optimallösung oder zeige Unzulässigkeit. Gib einen Beweis dafür an, dass eine gefundene Lösung optimal ist.

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + x_2 \\ 5 \leq \quad & 2x_1 + 2x_2 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 19 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 0 \leq \quad & x \\ & x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 43x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 12x_4 + 36x_5 + 22x_6 \\ & 12x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 \leq 20 \\ & 3x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 13x_4 + 20x_5 + 14x_6 \leq 36 \\ & x \in \{0, 1\}^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ & 12x_1 + 28x_2 + 39x_3 = 161 \\ 0 \leq \quad & x \\ & x \in \mathbb{Z}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 - s \\ & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 - s \leq 11 \\ 0 \leq \quad & x, s \\ & x \in \{0, 1\}^5 \end{aligned}$$