



## Klausurvorbereitungskurs Mathematik II für MB

### 3. Übung: Extrema, Kurven

#### A1 Definitheit

Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, negativ definit, indefinit oder nichts davon?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### A2 Extrema

Sei  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy + 12x - 6y$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- Bestimmen Sie den (einzig) stationären (= kritischen) Punkt von  $f$ .
- Entscheiden Sie, ob an diesem Punkt ein relatives Extremum vorliegt, und wenn ja, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

#### A3 Absolute Extrema

Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion  $f(x, y) = 2 \sin(x) + 3 \cos(y)$  in dem abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten

$$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

An welchen Stellen wird das Maximum, an welchen Stellen das Minimum angenommen?

**A4** Gegeben seien die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) = xy + e^{xy}$  sowie die Menge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1 \right\}.$$

- Berechnen Sie die kritischen Punkte im Inneren und klassifizieren Sie diese.
- Bestimmen Sie alle globalen Extremwerte von  $f$  auf  $K$ .

#### A5 Zykloide

Gegeben ist der Zykloidenbogen

$$\Gamma(t) = a \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

mit  $a > 0$ . Berechnen Sie

- seine Länge  $L$ ,
- die Tangente an der Stelle  $\Gamma(\pi)$ .