



Klausurvorbereitungskurs Mathematik II für MB

3. Übung: Extrema, Kurven

A1 Definitheit

Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, negativ definit, indefinit oder nichts davon?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A2 Extrema

Sei $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy + 12x - 6y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie den (einzigsten) stationären (= kritischen) Punkt von f .
- Entscheiden Sie, ob an diesem Punkt ein relatives Extremum vorliegt, und wenn ja, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

A3 Absolute Extrema

Man bestimme das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion $f(x, y) = 2 \sin(x) + 3 \cos(y)$ in dem abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten

$$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

An welchen Stellen wird das Maximum, an welchen Stellen das Minimum angenommen?

A4 Gegeben seien die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = xy + e^{xy}$ sowie die Menge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1 \right\}.$$

- Berechnen Sie die kritischen Punkte im Inneren und klassifizieren Sie diese.
- Bestimmen Sie alle globalen Extremwerte von f auf K .

A5 Zykloide

Gegeben ist der Zykloidenbogen

$$\Gamma(t) = a \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

mit $a > 0$. Berechnen Sie

- seine Länge L ,
- die Tangente an der Stelle $\Gamma(\pi)$.