2.1

§2 Funktionen & Differentiation in $\mathbb{R}^n$

Skalare Funktionen:

$f : \mathbb{R}^m \supset M \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in M$, falls für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergieren, gilt

$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$.

Gradient: $\nabla f := (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_m f(x))$

Richtungsableitung: $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$

$\nabla_v f(x_0) := \nabla f(x_0) \cdot v$.

Mit $e_j = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow j\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$ gilt

$\nabla_{e_j} f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot e_j = \partial_j f(x)$.

Vektorfelder:

$F : \mathbb{R}^m \supset M \to \mathbb{R}^n$, $\quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix: $DF(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_m f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \dots & \partial_m f_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \dots & \partial_m f_n(x) \end{pmatrix}$

$n \times m$-Matrix.

Aufgabe H28:

a) $f(x,y) := \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Stetig $\iff$ für jede Folge a_n „(x_n, y_n)" mit $a_n \to (0,0)$ muss $f(a_n) \to f(0,0)$, $n \to \infty$.

Setzen $f(0,0) := 0$.

Seien x_n, y_n Nullfolgen. Dann gilt

$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \le \frac{x_n^2}{\sqrt{x_n^2}} = x_n \to 0, \quad n \to \infty.$

$\Rightarrow$ Fortsetzung ~~[illegible]~~ ist stetig.

b) $g(x,y) := \frac{\sin(x) y^2}{x^2 + y^4}$ nicht stetig in $(0,0)$ fortsetzbar?

$(0, \frac{1}{n}) \to 0$: $g(0, \frac{1}{n}) = \sin(0) n^2 = 0$

$(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \to 0$: $g(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n^2}) \cdot \frac{1}{n^2}}{2 \frac{1}{n^4}} = \underbrace{\sin(\frac{1}{n^2}) \cdot \frac{n^2}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2} \cancel{\neq g}, n \to \infty.$

$\Rightarrow \lim g(0, \frac{1}{n}) \neq \lim g(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ $\left(\frac{\sin z}{z} \to 1, z \to 0 \right)$ LeHospital

$\Rightarrow$ g ist <u>nicht</u> stetig fortsetzbar.

Aufgabe P34: $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ $\Rightarrow \nabla f(x,y) = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}(x,y).$

ii) $\|R\| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{1+4} = 1.$

$\Rightarrow \nabla_R f(x,y) = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x - 2y) = \frac{4y - 2x}{\sqrt{5}(x^2+y^2)^2}$.

iii) Suchen ~~maximalen Wert~~ Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$, so dass $\|\nabla_v f(x,y)\|$ maximal ist.

$\|\nabla_v f(x,y)\| = \|\nabla f(x,y) \cdot v\| \underset{\uparrow}{\leq} \|\nabla f(x,y)\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(x,y)\|.$

(Cauchy-Schwarz-Ungl.)

$\Rightarrow v_G := \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$ Gradientenrichtung.

$\|\nabla_{v_G} f(x,y)\| = \|\nabla f(x,y)\|$, d.h. maximal

$\Rightarrow$ in Richtung des Gradienten.

Aufgabe 1: $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \exp(y) \end{pmatrix}$, $G(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ \cos x \end{pmatrix}$.

1. Methode direkt:

$$H(x,y) := F(G(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2\cos^2(y) \\ \exp(\cos x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DH(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos^2(y) & -x^2\cdot\sin(y)\cos(y) \\ -\exp(\cos x)\cdot\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

2. Methode Kettenregel:

$$DH(x,y) = DF(G(x,y))\cdot DG(x,y).$$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & \exp y \end{pmatrix}, \quad DG(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow DH(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos y & 0 \\ 0 & \exp(\cos x) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x\cos^2 y & -2x^2\sin y\cos y \\ -\exp(\cos x)\sin x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$DH(\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P35:

i) $F_1(x) = A^T \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

$DF_1(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^T.$

ii) $f_2(x) = x^T A \cdot x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix}$

$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3$
$+ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2.$

$\Rightarrow \nabla f_2(x) = (2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,$
$a_{12}x_1 + a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{32}x_3,$
$a_{13}x_1 + a_{31}x_1 + a_{21}x_2 + a_{12}x_2 + 2a_{33}x^2)$

$= x^T(A + A^T).$

iii) $f_3(x) = \|x-p\|^\alpha, \quad p \in \mathbb{R}^3, \; \alpha \neq 0. \qquad \|x-p\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - p_i)^2}$

$\frac{\partial}{\partial x_j} f_3(x) = \alpha \|x-p\|^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_i (x_i-p_i)^2}} \cdot 2(x_j - p_j)$

$= \alpha \|x-p\|^{\alpha-2} (x_j - p_j).$

$\Rightarrow \quad \nabla f_3(x) = \alpha \|x-p\|^{\alpha-2} (x-p)^T.$

iv) $F_4(x,y,z) = (x,y) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 6xy + 3xz + 5y^2 + 6yz$

$\Rightarrow \quad \nabla F_4(x,y,z) = (2x + 6y + 3z, \; 6x + 10y + 6z, \; 3x + 6y).$

2.2 Taylor-Polynom (2-dimensional)

$$T_m f\left(x_0 + \binom{h}{k}\right) = \sum_{l,n=0}^{l+n<m} \frac{\partial_x^l \partial_y^n}{l!\,n!} f(x_0)\cdot h^l k^n$$

$$R_m\left(x_0 + \binom{h}{k}\right) = O\left(\left\|\binom{h}{k}\right\|^m\right).$$

Aufgabe P36:

a) $f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{xy}{2}\right)$ um $(1,\pi)$

$$T_3 f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix} + \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{l+n=2}\frac{\partial_x^l\partial_y^n}{l!\,n!} f(x_0,y_0)(x-x_0)^l (y-y_0)^n}^{\frac{1}{2}(x-x_0,\,y-y_0)\nabla^2 f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}}.$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2x\sin\left(\tfrac{xy}{2}\right) + x^2\cos\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{y}{2},\; x^2\cos\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{x}{2}\right)$$

$$f_{xx} = \partial_x^2 f(x,y) = 2\sin\left(\tfrac{xy}{2}\right) + 2x\cos\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{y}{2} + 2x\cos\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{y}{2} - x^2\sin\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{y^2}{4}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x\cos\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{y}{x} + \tfrac{x^2}{2}\cos\left(\tfrac{xy}{2}\right) - \tfrac{x^2 y}{2}\sin\left(\tfrac{xy}{2}\right)\tfrac{y}{2}$$

$$f_{yy} = -\tfrac{x^4}{4}\sin\left(\tfrac{xy}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(1,\pi) = 1,\quad \nabla f(1,\pi) = (2,0),\quad \nabla^2 f(1,\pi) = D\nabla f(1,\pi)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1^2 & \partial_2\partial_1 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 \end{pmatrix} f(1,\pi) = \begin{pmatrix} 2-\frac{\pi^2}{4} & -\frac{\pi^2}{4} \\ -\frac{\pi^2}{4} & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_3 f(x,y) = 1 + 2(x-1) + 0(y-\pi)$$
$$+ \frac{1}{2}(x-1,\, y-\pi)\begin{pmatrix} 2-\frac{\pi^2}{4} & -\frac{\pi^2}{4} \\ -\frac{\pi^2}{4} & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\pi\end{pmatrix}.$$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y}$ um $(0,0)$

$$\nabla f(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2}(1,1)$$

$$f_{xx} = \frac{2(1+x+y)}{(1+x+y)^4} = \frac{2}{(1+x+y)^3} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx}$$

$$\Rightarrow f(0,0) = 1,\quad \nabla f(0,0) = (-1,-1),\quad \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_3 f(x,y) = 1 - x - y + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$$
$$= 1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2 = \underline{1 - x - y + (x+y)^2}.$$

Alternativ: $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y} = \dfrac{1}{1-(-x-y)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x-y)^n$

$\|(x,y)\| < 1$, geom. Reihe

$$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{1 - x - y + (x+y)^2}_{= T_3 f(x,y)} + O\left(\left\|\binom{x}{y}\right\|^3\right)$$

2.3 Nebenbei: Topologische Begriffe

Häufungspunkt x_0 einer Menge U: ex. Folge $(x_n) \subseteq U$, so dass $x_n \to x_0$.

Menge U heißt abgeschlossen, wenn alle ~~Ihre~~ Häufungspkt. bereits in U liegen.

Ein Punkt $y_0 \in U$ heißt innerer Punkt von U, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon^{(y_0)} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y_0 - y\| < \varepsilon\}$ (d.h. ein $\varepsilon > 0$) gibt, so dass $U_\varepsilon \subseteq U$.

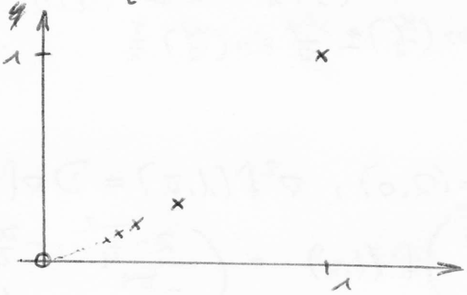
Die Menge U heißt offen, wenn ~~alle ihre Pun~~ sie nur innere Punkte enthält.

Eine Menge U heißt beschränkt, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt $\|x\| < R$.

Eine Menge U heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Aufgabe P28:

a) $U := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.



$(0,0)$ ist Häufungspunkt.

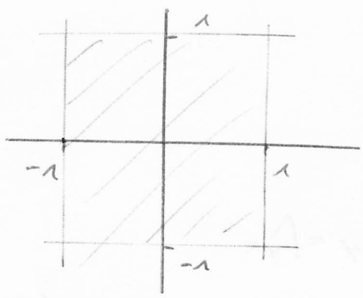
$\Rightarrow$ U nicht abgeschlossen. $\Rightarrow$ U nicht kompakt.

Sei $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon^{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})} \not\subseteq U$

$\Rightarrow$ U nicht offen.

U ist beschränkt, da für alle $x \in U$ gilt $\|x\| < 2$.

b) $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}$.



$(0,1)$ HP, da $(0, 1 - \frac{1}{n}) \to (0,1)$;

da $(0,1) \notin U$ ist U nicht abgeschlossen. $\Rightarrow$ U nicht komp.

U ist offen: $(x,y) \in U \Rightarrow |x| < 1, |y| < 1$

$\varepsilon := \frac{1}{2} \max\{|x|, |y|\}$

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U_\varepsilon(x,y) \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$

$\Rightarrow (x,y)$ innerer Punkt.

Die Menge U ist durch 2 beschränkt.