Fachbereich Mathematik
Raphael Schulz
Sommersemester 2011

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11.08.2011

Klausurvorbereitungskurs

Mathematik II für MB

2. Übung: Funktionen und Differentiation im $\mathbb{R}^n$

A1 Stetige Fortsetzung

Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad g(x,y) := \frac{\sin(x)y^2}{x^2+y^4}.$$

Beide Funktionen sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Wie können Sie $f(0,0)$ definieren, damit diese Fortsetzung von f stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Funktion g durch keine Wahl für $g(0,0)$ zu einer stetigen Funktion fortsetzen lässt. Betrachten Sie dazu geeignete Folgen $(x_n, y_n) \to (0,0)$.

A2 Steilster Anstieg

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von f in Richtung $R = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^T$.

(c) In welcher Richtung besitzt der Graph von f im Punkt $(x,y)^T$ seinen steilsten Anstieg?

A3 Jacobimatrix und Kettenregel

Man betrachte zwei Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die definiert seien durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \exp(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Es ist die Jacobimatrix der Komposition $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$H(x,y) = F(G(x,y))$$

zu bestimmen. Geben Sie darüber hinaus $DH(\frac{\pi}{2}, \pi)$ an.

A4 Ableitungen

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine 3×3-Matrix, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ und $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F_1(x) = A^T x$ (b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f_2(x) = x^t A x$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f_3(x) = \|x-p\|^\alpha$ (d) $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F_4(x) = (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

A5 Taylor-Polynom in $\mathbb{R}^2$

Stellen Sie für die folgenden Funktionen das Taylorpolynom $T_3 f$ um den angegebenen Entwicklungspunkt auf. Nutzen Sie, wenn möglich, bekannte Reihenentwicklungen.

(a) $f(x, y) := x^2 \sin(\frac{xy}{2})$ um $(1, \pi)$ (b) $f(x, y) := \frac{1}{1 + x + y}$ um $(0, 0)$

A6 Topologische Begriffe

(a) Skizzieren Sie die Menge $M := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Ist M offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt?

(b) Skizzieren Sie die Menge $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|, |y|\} < 1\}$. Ist U offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt?